

ORSAY
Série A
N° d'ordre 787

Exemplaire inscrit
aux archives originales
du Centre de Documentation
C. N. R. S.
sous le N° A - O - 5811

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Alain CHENCINER

1^{re} THÈSE : SUR LA GÉOMÉTRIE DES STRATES DE PETITES CODIMENSIONS
DE L'ESPACE DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES RÉELLES SUR
UNE VARIÉTÉ.

2^e THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 21 Juin 1971 devant la Commission d'examen

MM. H. CARTAN

Président

J. CERF
L. SCHWARTZ
R. THOM

Examineurs

ORSAY
Série A
N° d'ordre 787

Exemplaire inscrit
aux archives originales
du Centre de Documentation
C. N. R. S.
sous le N° A - O - 5811

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Alain CHENCINER

1^{re} THÈSE : SUR LA GÉOMÉTRIE DES STRATES DE PETITES CODIMENSIONS
DE L'ESPACE DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES RÉELLES SUR
UNE VARIÉTÉ.

2^e THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 21 Juin 1971 devant la Commission d'examen

MM. H. CARTAN

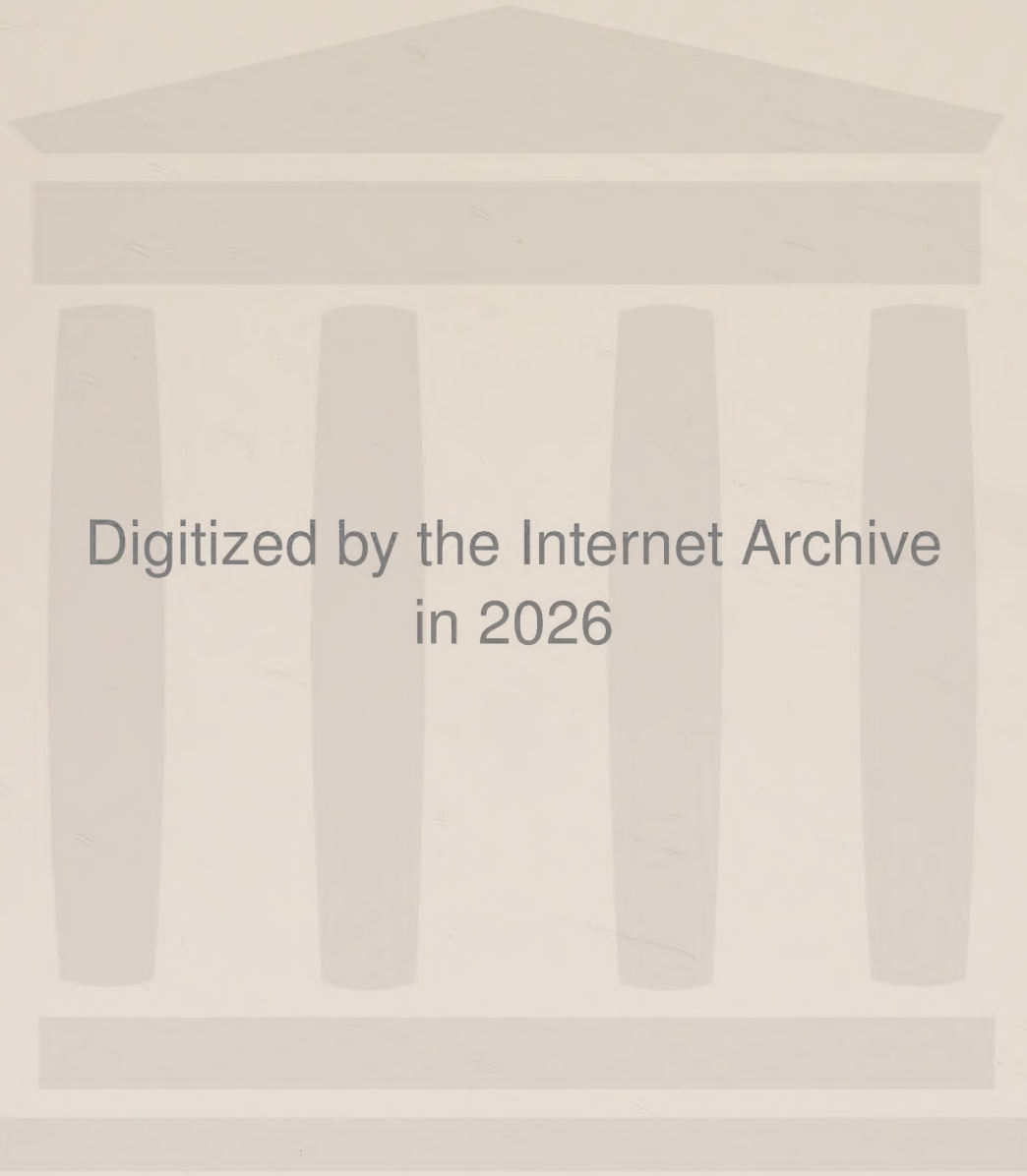
Président

J. CERF
L. SCHWARTZ
R. THOM

Examineurs



A mes parents.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554017_0016

Je remercie Henri CARTAN d'avoir bien voulu accepter la présidence du jury.

Sans les travaux de Jean CERF, cette thèse n'aurait pas existé. Je lui exprime ma reconnaissance pour m'avoir initié à ses méthodes et encouragé à continuer dans la voie qu'il avait tracée.

Une grande partie du chapitre 1 provient d'une recherche effectuée avec François LAUDENBACH. Ses critiques amicales ont toujours été fécondes et je suis heureux de le remercier ici d'une collaboration de plusieurs années que, j'espère, nous aurons l'occasion de poursuivre.

Ma gratitude va ensuite à Laurent SCHWARTZ dont la rencontre à l'Ecole Polytechnique a eu une influence déterminante sur mon orientation.

C'est dans les travaux de René THOM que je me suis familiarisé avec certaines des singularités que je considère dans cette thèse. Je le remercie de s'être joint aux membres du jury.

Je tiens aussi à remercier tous mes amis des Centres de Mathématiques et de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique ; leurs avis ont souvent été précieux et leurs rires bienfaisants.

Enfin, je suis très reconnaissant aux membres du secrétariat du Centre de leur gentillesse et de leur efficacité. Mademoiselle LECUYER a tapé en un temps record un manuscrit touffu, je l'en remercie chaleureusement.



TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 0	:	INTRODUCTION	<u>Page</u>
CHAPITRE 1	:	LA TECHNIQUE DES CHEMINS ELEMENTAIRES ; APPLICATIONS ET GENERALISATIONS.	
1.0		Introduction du chapitre 1	1.1
1.1		Influence de la partie non dégénérée d'une fonction sur son groupe local d'isotropie	1.2
1.2		Le lemme des familles élémentaires	1.19
1.3		Chemins élémentaires d'élimination	1.24
1.4		Chemins élémentaires d'élimination et nappes	1.39
1.5		Chemins élémentaires de naissance	1.44
1.6		Familles élémentaires à 2 paramètres de traversée de la strate $\mathfrak{F}_\alpha^2$	1.45
CHAPITRE 2	:	LE LEMME DE LA QUEUE D'ARONDE ET SES CONSEQUENCES.	
2.0		Introduction du chapitre 2	2.1
2.1		Enoncé et démonstration du lemme de la queue d'aronde	2.2
2.2		Quelques conséquences du lemme de la queue d'aronde	2.15
CHAPITRE 3	:	L'UNICITE DE L'ELIMINATION ET DE L'APPARITION DES QUEUES D'ARONDE ET SES CONSEQUENCES.	
3.0		Introduction du chapitre 3	3.1
3.1		Un théorème de plongement	3.2
3.2		Unicité de l'élimination des queues d'aronde	3.37
3.3		Unicité de l'apparition des queues d'aronde	3.43
3.4		Conséquences de l'unicité de l'élimination des queues d'aronde	3.48

- 3.5 Philosophie des théorèmes d'unicité faible des éliminations et de translation des indices : la simplicité homotopique de l'espace des "chemins en queue d'aronde"

3.5

CHAPITRE 4 : L'OMBILIC HYPERBOLIQUE ET LA TRANSLATION DES INDICES.

- 4.0 Introduction du chapitre 4 4.1
 4.1 Description sommaire de l'ombilic hyperbolique 4.1
 4.2 Le lemme de l'ombilic hyperbolique 4.4
 4.3 Applications à la translation des indices 4.13

CHAPITRE 5 : NON UNICITE, A PLUSIEURS PARAMETRES, DE L'ELIMINATION D'UN COUPLE DE POINTS CRITIQUES.

- 5.0 Introduction du chapitre 5 5.1
 5.1 Etude de $\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h); \varepsilon_0)$ pour $k = 2$ 5.2
 5.2 Etude de $\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h); \varepsilon_0)$ dans le cas général 5.23
 5.3 Interprétation en liaison avec le théorème d'unicité faible des éliminations (à paramètres) sur un cobordisme élémentaire. 5.37



CHAPITRE 0

I N T R O D U C T I O N

0.1 Soit (W, V_0, V_1) un cobordisme C^∞ compact ; on note $\mathfrak{F}(W)$ l'espace[♦] (muni de la topologie C^∞) des fonctions C^∞ $h: W \rightarrow I$ telles que $h^{-1}(t) = V_t$, $t = 0, 1$ (I désigne le segment $[0, 1]$). On posera $n+1 = \dim W$.

Rappelons que l'action du groupe produit des difféomorphismes de W par les difféomorphismes de I définit sur $\mathfrak{F}(W)$ une stratification localement triviale (voir [23]) dont on sait caractériser les strates de petites codimensions (voir [3], [4], [12], [27]). En particulier, la strate de codimension 0, notée $\mathfrak{F}^0(W)$, est le sous-espace formé des fonctions de Morse dont toutes les valeurs critiques sont distinctes (fonctions "excellentes") ; la strate de codimension 1 se décompose naturellement en deux parties, $\mathfrak{F}^1(W) = \mathfrak{F}_\alpha^1(W) \cup \mathfrak{F}_\beta^1(W)$: l'indice α correspond à des fonctions f ayant toutes leurs valeurs critiques distinctes et tous leurs points critiques non dégénérés sauf un qui est du type "naissance" (au voisinage d'un tel point, f s'écrit localement $q(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^3$, où q est une forme quadratique non dégénérée) ; l'indice β correspond à des fonctions de Morse ayant deux points critiques au même niveau.

Soit $h_0 \in \mathfrak{F}^0(W)$ et soient c_1, c_2 deux points critiques consécutifs de h_0 d'indices respectifs $i, i+1$. On note $\mathcal{C}(h_0, c_1, c_2)$ l'espace (muni de la topologie C^0) des chemins

$$\varepsilon : (I, 0, 1) \rightarrow (\mathfrak{F}^0(W) \cup \mathfrak{F}_\alpha^1(W), h_0, \mathfrak{F}^0(W))$$

réalisant l'élimination de c_1 et c_2 (ε traverse une seule fois $\mathfrak{F}_\alpha^1(W)$) ;

[♦] Si W est une variété ouverte, $\mathfrak{F}(W)$ désigne tout simplement l'espace des fonctions C^∞ à valeurs réelles définies sur W .

si un tel chemin existe, on dit que c_1 et c_2 sont en position de s'éliminer. On s'intéresse à l'application

$$e : \mathcal{C}(h_o, c_1, c_2) \rightarrow \mathfrak{I}^0(W)$$

définie par $e(\varepsilon) = \varepsilon(1)$; soit ε_o un point-base choisi dans $\mathcal{C}(h_o, c_1, c_2)$: on note $f_o = e(\varepsilon_o)$.

Si $\pi_j(\mathcal{C}(h_o, c_1, c_2); \varepsilon_o) = \{0\}$ ($j \geq 0$), on dit qu'il y a unicité forte des éliminations à j paramètres pour le triple (h_o, c_1, c_2) .

Si $\pi_j(e) : \pi_j(\mathcal{C}(h_o, c_1, c_2); \varepsilon_o) \rightarrow \pi_j(\mathfrak{I}^0(W); f_o)$ est la flèche nulle, on dit qu'il y a unicité faible des éliminations à j paramètres pour le triple (h_o, c_1, c_2) .

Enfin, si tout élément dans l'image de $\pi_j(e)$ est aussi dans l'image de $\pi_j(e')$, où

$$\pi_j(e') : \pi_j(\mathcal{C}(h'_o, c'_1, c'_2); \varepsilon'_o) \rightarrow \pi_j(\mathfrak{I}^0(W); f_o)$$

est défini de manière similaire à $\pi_j(e)$, le chemin ε'_o d'extrémité f_o correspondant cette fois à l'élimination d'un couple (c'_1, c'_2) de points critiques de h'_o d'indices $(i+1, i+2)$, on dit que le triple (h_o, c_1, c_2) a la propriété de translation des indices à j paramètres.

Moyennant des conditions sur la dimension de W et l'indice des points critiques c_1, c_2 (qui, sauf pour le (1) ci-dessous, ne sont vraiment satisfaisantes que pour $j=0$ et $j=1$) j'obtiens les résultats suivants :

(1) Il n'y pas en général unicité forte des éliminations à j paramètres : le "lemme d'unicité des morts" de Cerf ([4], chapitre III, § 2 prop. 4) , valable pour $j=0$ à condition que les variétés de niveau de h_o intermédiaires entre c_1 et c_2 soient simplement connexes, apparaît donc comme exceptionnel ! Rappelons que ce lemme est fondamental dans la démonstration du théorème de la pseudo-isotopie [4].

Notons M une telle variété intermédiaire (elles sont toutes difféomorphes) et posons $j = k-1$ afin d'être en accord avec les notations du chapitre 5. Dans le cas où M est k -connexe, je décris (voir chapitre 5) un isomorphisme entre $\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h_0, c_1, c_2); \varepsilon_0)$ et $\text{Coker } J_k \oplus \ker J_{k-1}$, où $J_k : \pi_k(SO(i)) \rightarrow \pi_{i+k}(S^L)$ est le J -homomorphisme[♦]. Dans le cas général, $\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h_0, c_1, c_2); \varepsilon_0)$ dépend des $(k+1)$ premiers groupes d'homotopie de M , et est indépendant de $\pi_{k+1}(M)$ dès que $\pi_1(M) = \{0\}$ (comparer à [12] où le cas $j \equiv k-1 = 0$ est complètement traité).

(2) On a en général la propriété de translation des indices à j paramètres : le cas $j = 0$ est traité dans [12] en utilisant le calcul du (1) ; je donne une démonstration indépendante de (1), ce qui me permet de traiter le cas $j \geq 1$ et d'améliorer pour $j = 0$ les conditions de dimension obtenues dans [12] (voir chapitres 2, 3 et 4).

(3) Il y a unicité faible des éliminations à j paramètres sur un cobordisme élémentaire d'indice suffisamment loin des extrêmes 0 et $n+1$, (voir chapitres 2 et 3). Ceci montre que le (2) n'est vraiment intéressant que dans le cas où c_1 et c_2 sont les seuls points critiques de h_0 ; W est alors difféomorphe à un produit $V \times I$, et l'extrémité f_0 du chemin d'élimination ε_0 est une fonction sans point critique. Je ne sais pas s'il y a ou non unicité faible des éliminations à j paramètres ($j \geq 0$) dans ces conditions.

Voici deux exemples, le premier pour $j = 0$, le second pour $j \geq 1$, montrant l'intérêt du problème des éliminations.

♦ On utilise indifféremment la notation $\pi_k(SO(i))$ et $\pi_k(0(i); id)$ dès que $k \geq 1$.

A - Obstructions à ce que pseudo-isotopie entraîne isotopie sur une variété V non simplement connexe (voir [24], [12], [29]). On sait d'après [4] que ce problème est lié au calcul du nombre de composantes connexes par arcs du sous-espace $\mathcal{E}(V \times I)$ de $\mathfrak{F}^0(V \times I)$ formé des fonctions sans point critique.

Soit $\mathfrak{F}_i^0(V \times I)$ le sous-espace de $\mathfrak{F}^0(V \times I)$ formé des fonctions ordonnées (nice) n'ayant que des points critiques d'indices i et $i+1$; soit $\mathfrak{F}_i(V \times I)$ l'intérieur de l'adhérence de $\mathfrak{F}_i^0(V \times I)$ dans $\mathfrak{F}(V \times I)$ (voir [4] et [12]). Les conditions dans lesquelles j'obtiens la translation des indices à 0 paramètre me permettent d'améliorer le résultat principal de [12] en montrant que $\mathfrak{F}_i(V \times I)$ est connexe par arcs dès que $2 \leq i \leq n-2$, $n = \dim V \geq 5$ (voir dans l'introduction de [12] la comparaison avec la démonstration du théorème du s-cobordisme).

L'obstruction style K-théorie (quotient de $K_2(\pi_1(V))$) décrite par Wagoner dans [29] intervient à ce point et permet de répondre à la question suivante : soient $f_0, f_1 : V \times I \rightarrow I$ deux fonctions sans point critique ; soient $\hat{f}_0, \hat{f}_1$ deux fonctions obtenues à partir de f_0, f_1 respectivement en faisant naître successivement q couples critiques d'indices $i, i+1$ (stabilisation) ; on note $\mathfrak{F}_{i;q}^0(V \times I)$ le sous-espace de $\mathfrak{F}_i^0(V \times I)$ formé des fonctions ayant q points critiques d'indice i et q points critiques d'indice $i+1$; $\hat{f}_0, \hat{f}_1 \in \mathfrak{F}_{i;q}^0(V \times I)$ et on suppose que $\hat{f}_0$ et $\hat{f}_1$ sont dans la même composante connexe par arcs de l'espace $\mathfrak{F}_{i;q}(V \times I) = \text{int } \mathfrak{F}_{i;q}^0(V \times I)$. Les fonctions $\hat{f}_0$ et $\hat{f}_1$ sont-elles dans la même composante connexe par arcs de $\mathfrak{F}_{i;q}^0(V \times I)$?

Si tel est le cas, on déduit de l'unicité faible des éliminations à 0 paramètre sur un cobordisme élémentaire que le nombre q de couples critiques que l'on fait naître peut être pris égal à 1 (déstabilisation partielle ; voir introduction du chapitre 2). La connaissance de $\pi_0(\mathcal{E}(V \times I))$, et en particulier son éventuelle dépendance de $\pi_2(V)$, est donc liée au problème de l'unicité faible des éliminations à 0 paramètre pour un triple (h_0, c_1, c_2) dans lequel c_1 et c_2 sont les deux seuls points critiques de $h_0 : V \times I \rightarrow I$; c'est à ce niveau que se situe une éventuelle obstruction à ce que pseudo-isotopie implique isotopie sur $S^n \times S^1$.

B - Etude de l'espace des difféomorphismes du disque :

Soit $\text{Diff}(D^{n+1})$ l'espace (muni de la topologie C^∞) des difféomorphismes conservant l'orientation de D^{n+1} , et soit $\text{Diff}(S^n \times I, S^n \times \{0\})$ l'espace des pseudo-isotopies sur S^n . Pour tout $j \geq 0$, on déduit de l'appendice de [3] l'isomorphisme (le point-base est l'identité) :

$$\pi_j(\text{Diff}(D^{n+1})) \cong \pi_j(SO(n+1)) \oplus \pi_j(\text{Diff}(S^n \times I, S^n \times \{0\})) \quad .$$

A l'aide des méthodes de lissage de Morlet (voir [21]) et d'un théorème de W. Browder (voir [0]) je montre dans [6] qu'il doit exister un couple (j, n) pour lequel $\pi_j(\text{Diff}(S^n \times I, S^n \times \{0\}))$ est non trivial.

Je pose maintenant la question : "existe-t-il un tel couple avec $j < n$ " ? (on sait d'après [3] et [4] que $\pi_0(\text{Diff}(S^n \times I, S^n \times \{0\})) = \{0\}$ pour $n \neq 3, 4$). Ce problème est lié à l'unicité faible des éliminations de la manière suivante : soit $h_0: S^n \times I \rightarrow I$ une fonction de Morse n'ayant que deux points critiques c_1 et c_2 , d'indices respectifs i et $i+1$. Si $4 \leq i \leq n-4$, on définit un morphisme $E(h_0)$ par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{C}(h_0, c_1, c_2); \varepsilon_0) & \xrightarrow{\pi_1(e)} & \pi_1(\mathcal{E}(S^n \times I); f_0) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{E(h_0)} & \pi_1(\text{Diff}(S^n \times I, S^n \times \{0\}); \text{id}) \quad . \end{array}$$

Dire qu'il n'y a pas unicité faible des éliminations à 1 paramètre pour le triple (h_0, c_1, c_2) reviendrait à dire que $E(h_0)$ est non trivial. On définit de même des morphismes $E(h_0): \text{Coker } J_k \oplus \text{ker } J_{k-1} \rightarrow \pi_{k-1}(\text{Diff}(S^n \times I, S^n \times \{0\}); \text{id})$

Je renvoie à [6] pour les relations avec la topologie PL (stabilité de $\text{PL}(n)$, pseudo-isotopies linéaires par morceaux sur S^n).

0.2 Ce travail est divisé en 5 chapitres, chacun muni d'une introduction : le chapitre 1 utilise et généralise la technique des chemins élémentaires de [4] ; en particulier, le calcul de $\pi_j(\mathcal{C}(h_0, c_1, c_2); \varepsilon_0)$ y est réduit à un problème géométrique. Une grande partie de ce chapitre a été réalisée en collaboration avec F. Laudénbach. Le chapitre 5 contient le calcul dans certains cas de ce groupe et utilise essentiellement des méthodes de modification d'intersection par chirurgie (voir [30]) ; à l'exception du paragraphe 5.3, il peut être lu indépendamment des chapitres 2, 3 et 4 sur lesquels je m'arrêterai maintenant.

Ces trois chapitres concernent les points (2) et (3) (translation des indices et unicité faible des éliminations sur un cobordisme élémentaire). Les démonstrations font intervenir des résultats sur la géométrie des strates $\mathfrak{F}^2(W)$ et $\mathfrak{F}^3(W)$ de codimension respectivement 2 et 3. On étudie en particulier la partie $\mathfrak{F}_\alpha^2(W)$ de $\mathfrak{F}^2(W)$ formée des fonctions f dont toutes les valeurs critiques sont distinctes et dont tous les points critiques sauf un sont non dégénérés, l'équation locale de f au voisinage du point critique dégénéré étant de la forme $q(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^4$, où $n+1 = \dim W$, et où q est une forme quadratique non dégénérée (Cerf appelle cette singularité "queue d'aronde" et Thom l'appelle "cusp" : la différence vient de ce que Thom se réfère à une stratification alors que Cerf se réfère à un graphique). On rencontre aussi la partie $\mathfrak{F}_\beta^2(W)$ de $\mathfrak{F}^2(W)$ formée des fonctions ayant toutes leurs valeurs critiques distinctes et tous leurs points critiques, sauf deux, non dégénérés, les deux points exceptionnels étant du type $\mathfrak{F}_\alpha^1(W)$ (naissance). La strate de codimension 3 n'intervient qu'au chapitre 4, avec l'ombilic hyperbolique.

Le problème général que je me suis posé peut être exprimé comme suit soit $\Gamma_{r+1} : D^{r+1} \rightarrow \mathfrak{F}(W)$ (r petit) une carte transverse en un point de la strate $\mathfrak{F}^{r+1}(W)$ de codimension $r+1$ de $\mathfrak{F}(W)$ (voir paragraphe 1.2). Soit $\varphi : D^r \rightarrow \mathfrak{F}(W)$ une application continue générique ayant un graphique isomorphe à celui de la restriction de Γ_{r+1} à une partie D_0^r de ∂D^{r+1} difféomorphe à D^r (le graphique de φ est le sous-espace de $D^r \times I$ formé des couples (x, t) , où t est valeur critique de la fonction $\varphi(x)$; on indique sur le graphique les indices critiques correspondants). Dans quelles

conditions peut-on assurer que φ se prolonge en une application $\tilde{\varphi} : D^{r+1} \rightarrow \mathfrak{J}(W)$ ayant un graphique isomorphe à celui de Γ_{r+1} ?

Le premier exemple d'un problème de ce type est celui résolu par le "cancellation lemma" de Smale ; la strate en jeu est ici $\mathfrak{J}_\alpha^1(W)$, donc $r=0$, et l'image $\varphi(D^0)$ est une fonction de Morse sur W dont on cherche à éliminer deux points critiques consécutifs c_1 et c_2 : il y a une condition non triviale, à savoir l'existence d'un couple de nappes en bonne position (voir [5]). Cette condition assure la contractibilité du polyèdre obtenu en prenant la réunion des lignes de gradient de $\varphi(D^0)$ (pour une certaine métrique riemannienne sur W) passant par c_1 et c_2 et limitées à deux niveaux entre lesquels $\varphi(D^0)$ n'a que c_1 et c_2 comme points critiques.

C'est encore le même genre de conditions que l'on rencontre dans le cas général : si $D_0^r \subset \partial D^{r+1}$ est bien choisi, on peut associer à φ un polyèdre (saturé d'un ensemble de nappes adaptées à une certaine fonction de Morse dans l'image de φ) et l'obstruction à l'existence du prolongement $\tilde{\varphi}$ est liée à l'homotopie de ce polyèdre.

Le résultat le plus intéressant dans cette direction est le lemme de la queue d'aronde, démontré dans le chapitre 2, qui implique les affirmations (2) et (3) du paragraphe 0.1 dans le cas où $j=0$.

La queue d'aronde a d'ailleurs bien d'autres propriétés miraculeuses : unicité des apparitions, unicité des disparitions, simplicité homotopique de l'espace des "chemins en queue d'aronde" (voir chapitre 3) dont on déduit (2) et (3) dans le cas général.

Pour finir, voici une conjecture : si on cherche à rajouter un paramètre dans la démonstration de Cerf (par exemple dans le but de calculer $\pi_1(\text{Diff}(D^n))$) on rencontre, outre le problème de l'unicité faible des éliminations dont on a parlé en 0.1, le problème de la simple connexité de l'espace $\mathfrak{J}_i(W)$; il semble en effet que $\pi_1(\mathfrak{J}_i(W))$ soit non trivial, essentiellement parce que l'espace des chemins de fonctions d'origine fixée réalisant le croisement d'un couple de points critiques d'indices i ,

$i+1$ n'est pas simplement connexe (voir [4] et [18]). Soit $\mathcal{G}_i^0(W)$ le sous-espace de $\mathfrak{F}^0(W)$ formé des fonctions (pas forcément ordonnées) n'ayant que des points critiques d'indices i et $i+1$, et $\mathcal{G}_i(W)$ l'intérieur de l'adhérence de $\mathcal{G}_i^0(W)$ dans $\mathfrak{F}(W)$.

Les résultats semi-locaux contenus dans le présent travail devraient permettre de démontrer la simple connexité de l'espace $\mathcal{G}_i(V \times I)$. En tout cas, l'analogie avec la situation de [4] fait conjecturer que si un lacet dans $\mathcal{E}(V \times I)$ est contractible dans $\mathcal{G}_i(V \times I)$, il l'est aussi dans $\mathfrak{F}_i(V \times I)$ (comparer à [4] où il est démontré que si un chemin dans $\mathfrak{F}_i(V \times I)$ a ses extrémités dans $\mathcal{E}(V \times I)$, il est homotope avec extrémités fixes à un chemin sur lequel ne se produisent que des croisements d'un seul type $[(i,i) \text{ ou } (i+1,i+1)]$; dans notre cas, on veut supprimer les croisements $(i,i+1)$). Si ces deux conjectures sont vérifiées, le morphisme induit par l'inclusion $\pi_1(\mathcal{E}(V \times I)) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{F}_i(V \times I))$ est trivial, ce qui serait l'amorce d'une théorie d'obstruction stable comme dans [4] et [29].



CHAPITRE 1

LA TECHNIQUE DES CHEMINS ELEMENTAIRES ;
APPLICATIONS ET GENERALISATION

1.0 Dans [4] J. Cerf a besoin de renseignements sur l'homotopie de l'espace des chemins d'origine fixée traversant certaines composantes connexes de la strate de codimension 1 dans la stratification naturelle de l'espace $\mathfrak{J}(W)$ des fonctions différentiables réelles sur une variété W . Pour se ramener à des problèmes géométriques raisonnables, il crée la notion de chemin élémentaire qui me semble être une des idées les plus fécondes de [4].

Dans le paragraphe 1.2, je généralise cette notion au cas de strates de codimension finie quelconque d'un espace dont la stratification est localement triviale (c'est bien le cas de $\mathfrak{J}(W)$ d'après [23]). Le "lemme des chemins élémentaires" de [4] se généralise immédiatement en un "lemme de familles élémentaires" qui est utilisable chaque fois que l'on connaît bien la structure locale des strates mises en jeu (voir chapitre 3 pour des applications).

Les paragraphes 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 ont été réalisés en collaboration avec F. Laudenbach ; les paragraphes 1.3, 1.4, 1.5 développent les résultats annoncés dans [11] : on y réduit complètement le calcul de l'homotopie de l'espace des chemins d'élimination d'origine fixée à un problème géométrique (qui sera résolu en partie au chapitre 5 ; voir aussi [12]).

Le paragraphe 1.6 traite (assez rapidement) le cas de la singularité de codimension 2 que Cerf appelle "queue d'aronde" (et que Thom appelle "cusp" ou "catastrophe de Riemann-Hugoniot" dans [27]) ; l'application de la méthode des familles élémentaires (à deux paramètres) se fait suivant un plan en tous points semblable à celui qui est suivi dans les paragraphes 1.3 et 1.4.

Ce chapitre commence par la démonstration d'un théorème (paragraphe 1.1, théorème 1.1.17) dont les paragraphes 1.3 et 1.6 utilisent des cas particuliers (le cas de la singularité de naissance, utilisé en 1.3, a été résolu en collaboration avec F. Laudénbach dans [11] ; le théorème général a été annoncé dans [8]).

On montre que, au moins homotopiquement, on peut séparer l'influence de la partie non dégénérée d'une fonction $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sur le groupe local d'isotropie de h (c'est-à-dire le sous-groupe des difféomorphismes locaux φ de $(\mathbb{R}^n, 0)$ tels que $h\varphi = h$). Etant donné l'intérêt propre de ce résultat, nous avons cru bon de le détacher ainsi.

1.1 Influence de la partie non dégénérée d'une fonction sur son groupe local d'isotropie ♦

1.1.1 Position du problème : Soit Ω un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$, et

$$f: (\Omega, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$$

une fonction C^∞ telle que $f'(0) = 0$. On peut supposer (voir [33]) que f s'écrit

$$f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = q(x_1, \dots, x_k) + d(x_{k+1}, \dots, x_n)$$

où $q(x_1, \dots, x_k) = -\sum_{s=1}^i x_s^2 + \sum_{s=i+1}^k x_s^2$, et où d est totalement dégénérée à

l'origine (on se permet de réduire Ω ; on choisira par exemple un voisinage produit de 0 dans $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$).

Si $\mathcal{U}$ est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$, on note $\text{Plgt}_0(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ l'espace, muni de la topologie C^∞ , des plongements lisses conservant l'origine de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^n$. On munit l'ensemble $\text{Diff}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, 0)$ des germes de tels plongements de la structure semi-simpliciale définie de la manière suivante :

♦ Les résultats de ce paragraphe ont été annoncés dans [8] (le cas particulier où $d(x_n) = x_n^3$ a été annoncé dans [11]).

un p -simplexe est représenté par un plongement différentiable

$A: \Delta^p \times \mathcal{U} \rightarrow \Delta^p \times \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}$ voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tel que : pour tout $\alpha \in \Delta^p$, et tout $x \in \mathcal{U}$, $A(\alpha, x) = (\alpha, a_\alpha(x))$ et $a_\alpha \in \text{Plgt}_0(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$. Deux tels plongements $A_1: \Delta^p \times \mathcal{U}_1 \rightarrow \Delta^p \times \mathbb{R}^n$ et $A_2: \Delta^p \times \mathcal{U}_2 \rightarrow \Delta^p \times \mathbb{R}^n$ définissent le même p -simplexe s'il existe $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ tel que les restrictions de A_1 et A_2 à $\Delta^p \times \mathcal{U}$ coïncident. Les opérateurs de face et de dégénérescence sont définis de manière évidente (voir [20], chapitre I).

Soit $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{Q}(\mathcal{U})$ un idéal du faisceau des germes de fonctions C^∞ de Ω dans $\mathbb{R}$; si $0 \in \mathcal{U} \subset \Omega$, on note $G[f, \mathcal{Q}(\mathcal{U})]$ le sous-espace de $\text{Plgt}_0(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ formé des plongements $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \Omega$ tels que $f\varphi - (f|_{\mathcal{U}}) \in \mathcal{Q}(\mathcal{U})$. Si $\mathcal{Q}(\mathcal{U}) = 0$, on note $G[f, \mathcal{Q}(\mathcal{U})] = G_{\mathcal{U}}(f)$.

Soit $\mathcal{Q}$ la fibre en 0, c'est-à-dire l'ensemble des germes en 0 d'éléments de $\mathcal{Q}(\mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de 0 dans Ω ; $\mathcal{Q}$ est un idéal de l'anneau local des germes en 0 de fonctions C^∞ de Ω dans $\mathbb{R}$; on note $G(f, \mathcal{Q})$ le sous-ensemble[♦] de $\text{Diff}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, 0)$ formé des germes en 0 d'éléments de $G[f, \mathcal{Q}(\mathcal{U})]$ où $\mathcal{U}$ parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de 0 dans Ω .

On munit $G(f, \mathcal{Q})$ de la structure semi-simpliciale suivante : un p -simplexe est représenté par un plongement différentiable $A: \Delta^p \times \mathcal{U} \rightarrow \Delta^p \times \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}$ voisinage ouvert de 0 dans Ω , tel que : pour tout $\alpha \in \Delta^p$, et tout $x \in \mathcal{U}$, $A(\alpha, x) = (\alpha, a_\alpha(x))$, et $a_\alpha \in G[f, \mathcal{Q}(\mathcal{U})]$. La relation d'équivalence est la même que dans le cas de $\text{Diff}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, 0)$, ainsi que les opérateurs de face et de dégénérescence.

$G(f, 0) \equiv G(f)$ est, par définition, le groupe local d'isotropie de f en 0; il est clair que c'est un groupe semi-simplicial.

♦ Dans [8] on affirme à tort que c'est un sous-groupe quel que soit $\mathcal{Q}$.

Pour alléger les notations, nous adopterons dans la suite la convention suivante : si X est un espace topologique et Y est un complexe semi-simplicial, on se permettra d'écrire $\Phi: X \rightarrow Y$ (resp. $\Psi: Y \rightarrow X$) à la place de $\Phi: \mathcal{J}(X) \rightarrow Y$ (resp. $\Psi: Y \rightarrow \mathcal{J}(X)$) pour désigner un morphisme semi-simplicial du complexe singulier différentiable $\mathcal{J}(X)^\diamond$ de X dans Y (resp. de Y dans $\mathcal{J}(X)$).

Soit $JG(f, \mathcal{A}) \subset GL(n; \mathbb{R})$ le sous-espace formé des jets en 0 d'éléments[♦] de $G(f, \mathcal{A})$, et $J: G(f, \mathcal{A}) \rightarrow JG(f, \mathcal{A})$ le morphisme "jet" qui à un p -simplexe de $G(f, \mathcal{A})$ représenté par $A: \Delta^p \times \mathcal{U} \rightarrow \Delta^p \times \mathbb{R}^n$ associe le p -simplexe singulier de $JG(f, \mathcal{A})$ défini par l'application

$$J_A: \Delta^p \rightarrow JG(f, \mathcal{A}) \quad , \quad J_A(\alpha) = a'_\alpha(0)$$

(rappelons qu'on a noté $A(\alpha, x) = (\alpha, a_\alpha(x))$).

Nous allons commencer par étudier le sous-groupe $JG(f)$.

1.1.2 Structure de $JG(f)$:

Soit $\mathfrak{J}(f)$ l'idéal jacobien de f , $\mathfrak{J}(\mathfrak{d})$ celui de $\mathfrak{d}$; $\mathfrak{J}(f)$ est par définition l'ensemble des germes en 0 d'éléments de $\mathfrak{J}(f)(\mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de 0 dans Ω , et où $\mathfrak{J}(f)(\mathcal{U})$ est l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $\sum_{j=1}^n X_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, les X_j étant des fonctions C^∞ quelconques de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$.

Les définitions relatives à $\mathfrak{d}$ sont les mêmes en remplaçant $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{R}^{n-k}$. Enfin soit $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de l'anneau local des germes en 0 de

♦ Le complexe singulier différentiable de X est le complexe semi-simplicial, ayant même type d'homotopie que X , dont les p -simplexes sont les applications différentiables de Δ^p dans X .

♦♦ Quand on parle d'éléments, il s'agit bien entendu d'éléments du 0-squelette.

fonctions C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$; il est naturel d'appeler $\mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)(\mathcal{U})$ l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $\sum_{j,k,l=1}^n X_{j,k,l}(x) x_j \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \frac{\partial f}{\partial x_l}(x)$.

1.1.3 Proposition : $JG(f) = JG(f, \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f))$, et $JG(d) = JG(d, \mathfrak{J}^2(d))$.

Démonstration : Elle est basée sur la méthode de J. Mather telle qu'elle a été exposée dans [25] ; nous ferons la démonstration pour f ; celle pour d est identique en tenant compte du fait que d est totalement dégénérée à l'origine. La considération de $\mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$ remonte à [11] et nous a été suggérée par Bernard Teissier.

Si $g \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)(\mathcal{U})$, et si $t \in]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$, il existe un ouvert $\mathcal{V}$, voisinage de 0 dans $\mathcal{U}$, tel que l'idéal $\mathfrak{J}(f + tg)(\mathcal{V})$ soit constant ; en effet, on voit immédiatement que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f + tg) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}(f + tg) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + ta_{11} & ta_{12} & \dots & ta_{1n} \\ ta_{21} & 1 + ta_{22} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ta_{n1} & \dots & \dots & 1 + ta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

où les a_{ij} sont des fonctions C^∞ de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0 ; il existe donc un ouvert $\mathcal{V}$, $0 \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, tel que pour tout $x \in \mathcal{V}$ et tout $t \in]\alpha, \beta[$ (α et β sont supposés bornés), la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 + ta_{11}(x) & ta_{12}(x) & \dots & ta_{1n}(x) \\ ta_{21}(x) & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ ta_{n1}(x) & & & 1 + ta_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

soit inversible, d'où la conclusion.

On en déduit que la restriction à $\mathcal{V}$ de g s'écrit sous la forme

$$g(x) = - \sum_{j=1}^n X_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = - \sum_{j=1}^n X_j^t(x) \frac{\partial(f + tg)}{\partial x_j}(x) \quad ,$$

où le champ de vecteurs (sur $\mathcal{V}$) $X^t = (X_1^t, \dots, X_n^t)$ dépend différentiablement de $t \in]\alpha, \beta[$ et du champ $X = (X_1, \dots, X_n)$. De plus, on peut supposer que, pour tout $j = 1, \dots, n$, $X_j \in \mathfrak{M}\mathfrak{S}(\mathcal{V}) \subset \mathfrak{M}^2(\mathcal{V})$; il en est donc de même de X_j^t pour $t \in]\alpha, \beta[$.

On considère alors la famille $\{\Phi_t \mid t \in]\alpha_0, \beta_0[\}$ d'éléments de $\text{Plgt}_0(\mathcal{V}_0, \mathcal{V})$ solution (flot local) de l'équation différentielle dépendant du temps

$$(E) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(x) = X^t(\Phi_t(x)) \quad ; \quad \Phi_0 = \text{identité} \quad .$$

(Bien entendu $]\alpha_0, \beta_0[\subset]\alpha, \beta[$ et $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$).

On vérifie que $\frac{\partial}{\partial t} [(f + tg)\Phi_t(x)] = 0$, ce qui entraîne $(f + tg)\Phi_t(x) = f(x)$ pour $t \in]\alpha_0, \beta_0[$, $x \in \mathcal{V}_0$, et que $\Phi'_t(0)$ est constant, donc égal à l'identité.

Si $]\alpha_0, \beta_0[\supset [0, 1]$ on en déduit la proposition 1.1.3 de la manière suivante : soit $m \in \text{JG}(f, \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f))$; il existe un ouvert U et un élément $\varphi \in G[f, \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f)(U)]$ tel que $\varphi'(0) = m$; soit g l'élément de $\mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f)(U)$ défini par $g(x) = f\varphi(x) - f(x)$, et soit $\{\Phi_t \mid t \in [0, 1]\}$ la famille à un paramètre d'éléments de $\text{Plgt}_0(\mathcal{V}_0, \mathcal{V})$ définie comme précédemment à partir de g . On a, pour tout $x \in \mathcal{V}_0$, $(f + tg)\Phi_t(x) = f(x)$; en particulier $(f + g)\Phi_1(x) = f(x)$, donc $f\varphi\Phi_1(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}_0$, c'est-à-dire $\varphi\Phi_1 \in G_{\mathcal{V}_0}(f)$.

Puisque $(\varphi\Phi_1)'(0) = \varphi'(0)\Phi'_1(0) = \varphi'(0) = m$, on a démontré que $m \in \text{JG}(f)$.

Il nous reste à vérifier qu'on peut choisir $\mathcal{V}_0$ de façon que $]\alpha_0, \beta_0[\supset [0, 1]$; ceci découle immédiatement du fait que les X_j^t sont dans $\mathfrak{M}^2(\mathcal{V})$: pour le voir, on reprend les majorations sur $]\alpha_0, \beta_0[$ et $\mathcal{V}_0$ qui interviennent dans la démonstration de l'existence d'un flot local pour

une équation différentielle dépendant du temps (voir par exemple [17]. proposition 1, paragraphe 1, chapitre 4) et on s'aperçoit que si $\mathcal{V}_0$ est choisi assez petit, on peut prendre $] \alpha_0, \beta_0 [$ aussi grand qu'on veut dans $] \alpha, \beta [$; il suffit donc de partir avec $] \alpha, \beta [\supset] 0, 1 [$.

1.1.4 Proposition : $JG(f)$ est le sous-groupe de $GL(n; \mathbb{R})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ M & S \end{pmatrix}$ telles que : $A \in O(i, k-i)$ (c'est-à-dire A laisse q invariante) et $S \in JG(d)$. (M est quelconque).

Démonstration : On remarque tout d'abord que si $m \in JG(f, \mathfrak{M}^3)$, alors $m = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & S \end{pmatrix}$ avec $A \in O(i, k-i)$: pour cela, on calcule $f(\frac{1}{\lambda} \varphi(\lambda x)) - f(x)$ pour $\varphi \in G(f, \mathfrak{M}^3(U))$ tel que $\varphi'(0) = m$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit, en appelant $(m_1(x), \dots, m_n(x)) = m(x)$ le transformé de $x \in \mathbb{R}^n$ par m , que

$$f(m(x)) - f(x) = d(m_{k+1}(x), \dots, m_n(x)) - d(x_{k+1}, \dots, x_n) ,$$

d'où on tire

$$(I) \quad q(m_1(x), \dots, m_k(x)) = q(x_1, \dots, x_k) .$$

(1) Si on fait $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$, on obtient $m = \begin{pmatrix} A & N \\ M & S \end{pmatrix}$ avec $A \in O(i, k-i)$

(2) Posons $N = (Y_{k+1}, \dots, Y_n)$ (Y_1 est un vecteur-colonne ayant k coordonnées). De l'égalité (I) on déduit que, pour tout $l = k+1, \dots, n$, $q(Y_l) = 0$, puis que Y_l est orthogonal à tous les $A(x_1, \dots, x_k)$, donc $Y_l = 0$ et $N = 0$.

Soit J_1 (resp. J_2) le sous-groupe de $GL(n; \mathbb{R})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ M & I \end{pmatrix}$, $A \in O(i, k-i)$ (resp. $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$, $S \in JG(d)$); on a désigné par I alternativement la matrice identité $(n-k) \times (n-k)$ et la matrice identité $k \times k$.

1.1.5 Lemme : Le morphisme $J : G(f, \mathfrak{M}^2(f)) \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$ admet une section^{*} τ au-dessus du sous-groupe $J_1 \subset GL(n; \mathbb{R})$.

^{*} Avec les conventions de 1.1.1, τ est un morphisme semi-simplicial du complexe singulier différentiable de J_1 dans $G(f, \mathfrak{M}^2(f))$.

Démonstration : Si $A \in O(i, k-i)$, il est clair que l'application linéaire représentée par la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ est un élément de $G_{\mathbb{R}^n}(f)$. Puisque $\begin{pmatrix} A & 0 \\ M & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I & 0 \\ M & I \end{pmatrix}$, il suffit de trouver une section de J au-dessus du sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} I & 0 \\ M & I \end{pmatrix}$.

On va chercher un élément $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in G[f, \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f)(U)]$ (U assez petit) tel que $\phi'(0) = m = \begin{pmatrix} I & 0 \\ M & I \end{pmatrix}$ sous la forme :

$$\phi = m + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

où B_1 (resp. B_2) est une matrice $k \times (n-k)$ (resp. $(n-k) \times (n-k)$) à coefficients réels constants.

Si on écrit $q(x_1, \dots, x_k) = (x_1 \dots x_k) Q \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$, il vient

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{pmatrix} = 2 Q \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \text{ et donc } \phi = \text{identité} + \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ \frac{1}{2} M Q^{-1} & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

On calcule alors sur un ouvert U :

$$f \phi(x) - f(x) = \sum_{j=1}^n (\phi_j(x) - x_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{u_i + u_j = 2 \\ i, j = 1, \dots, k}} (\phi_i(x) - x_i)^{u_i} (\phi_j(x) - x_j)^{u_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + R(x),$$

avec $R \in \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f)(U)$ (remarquer que, si $i, j = k+1, \dots, n$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathfrak{M}(U)$, et utiliser la formule de Taylor avec reste intégral).

On en déduit que $f \phi - (f|U) \in \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f)(U)$ équivaut à l'équation ci-dessous dans laquelle tr désigne la transposition :

$$0 \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ \frac{1}{2}MQ^{-1} & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}^tB_1QB_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Il existe une solution canonique rendant antisymétrique la somme des deux matrices intervenant dans cette équation :

$$\begin{cases} B_1 = -\frac{1}{2} {}^tB_1(Q^{-1}) {}^tB_1 \\ B_2 = -{}^tB_1QB_1 = -\frac{1}{4}M {}^tB_1(Q^{-1}) {}^tB_1. \end{cases}$$

Soit $A: \Delta^p \rightarrow \mathcal{M}(n-k, k)$ un p -simplexe du complexe singulier différentiable de l'espace des matrices $(n-k) \times k$. Nous allons associer à A un p -simplexe $\tau(A)$ de $G(f, \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f))$ tel que $J\tau(A) = A$ (on identifie ici les matrices M et $\begin{pmatrix} I & 0 \\ M & I \end{pmatrix}$).

Si $p = 0$, et si $M \in \mathcal{M}(n-k, k)$, on représente $\tau(M)$ par

$$\phi_M = \text{identité} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} {}^tB_1(Q^{-1}) {}^tB_1 \\ \frac{1}{2}MQ^{-1} & -\frac{1}{4} {}^tB_1(Q^{-1}) {}^tB_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Il existe une boule fermée $b(M)$ voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$ telle que $\phi_M|_{b(M)}$ soit un plongement. Les plongements formant un ouvert dans les applications C^∞ pour la topologie C^∞ , on voit que si M' est assez voisine de M dans $\mathcal{M}(n-k, k)$, $\phi_{M'}|_{b(M)}$ est encore un plongement ; on en déduit, par un argument de compacité, qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbf{R}^n$ qui vérifie : pour tout $M \in A(\Delta^p)$, $\phi_M|_{\mathcal{V}}$ est un plongement. Par définition, le p -simplexe $\tau(A)$ est représenté par le plongement de $\Delta^p \times \mathcal{V}$ dans $\Delta^p \times \mathbf{R}^n$ qui à (α, x) associe $(\alpha, \phi_M(x))$, où $M = A(\alpha)$. On a construit ϕ_M de manière que $\phi'_M(0) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ M & I \end{pmatrix}$, donc $J\tau(A) = A$, et le lemme 1.1.5 est démontré.

1.1.6 Suite de la démonstration de la proposition 1.1.4 :

Remarquons que si $m = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & S \end{pmatrix}$, on peut écrire $m = m_1 m_2$ avec $m_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & I \end{pmatrix}$ et $m_2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$. Si $A \in O(i, k-i)$, on a $m_1 \in J_1$; soit $\varphi \in G(f)$ tel que $J\varphi = m$. Le lemme qui suit montre que $(\tau m_1^{-1})\varphi \in G(f, \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f))$ (c'est-à-dire est un 0-simplexe de ce complexe) où τ a été définie dans le lemme 1.1.5.

1.1.7 Lemme : $G(f, \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f))$ est stable pour la composition.

Démonstration : Il s'agit de montrer que deux germes φ_1, φ_2 qui vérifient $f\varphi_1 - f \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$ et $f\varphi_2 - f \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$ vérifient $f\varphi_1\varphi_2 - f \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$ (quand il n'y a pas de problème de domaine de définition, on dénote de la même façon un germe et un représentant de ce germe).

Puisque $f\varphi_1\varphi_2 - f = f\varphi_1\varphi_2 - f\varphi_2 + f\varphi_2 - f$, il nous suffit de montrer que $f\varphi_1\varphi_2 - f\varphi_2 \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$. Pour cela, on différentie la relation $f\varphi_2 - f \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$ en rappelant que $\mathfrak{J}(f) \subset \mathfrak{M}$; il vient

$$\sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l}(\varphi_2(x)) \frac{\partial(\varphi_2)_l}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + R_j(x) ,$$

où $R_j \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}(f)$, donc $\sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l}(\varphi_2(x)) \frac{\partial(\varphi_2)_l}{\partial x_j}(x) \in \mathfrak{J}(f)$. Puisque φ_2 est un difféomorphisme local, la matrice $\left(\frac{\partial(\varphi_2)_l}{\partial x_j}(x) \right)$ est inversible pour x assez voisin de l'origine, ce qui montre que, pour tout $l = 1, \dots, n$,

$\frac{\partial f}{\partial x_l}(\varphi_2) \in \mathfrak{J}(f)$. A partir de $f\varphi_1 - f \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$, on déduit facilement (puisque φ_2 conserve l'origine) que $f\varphi_1\varphi_2 - f\varphi_2 \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$.

1.1.8 Fin de la démonstration de la proposition 1.1.4 :

Posons $\phi = (\tau m_1^{-1})\varphi \in G(f, \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f))$. On a $\phi'(0) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \in JG(f, \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f))$. Nous allons en déduire que $S \in JG(d, \mathfrak{J}^2(d)) = JG(d)$. Définissons $\theta = (\theta_{k+1}, \dots, \theta_n)$ par $\theta_l(x_{k+1}, \dots, x_n) = \phi_l(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$; on voit que $\theta'(0) = S$ et que

$$\begin{aligned} & d(\theta_{k+1}(x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, \theta_n(x_{k+1}, \dots, x_n)) - d(x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &= -q(\theta_1(x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, \theta_k(x_{k+1}, \dots, x_n)) + R(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad , \end{aligned}$$

avec $R \in \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f)$.

Il est clair que, si on montre que pour tout $j = 1, \dots, k$, $\theta_j(x_{k+1}, \dots, x_n) = \phi_j(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}(d)$, on en déduit immédiatement $\theta \in G(d, \mathfrak{S}^2(d))$. Mais $\phi_j(x_1, \dots, x_n) = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi(x_1, \dots, x_n))$ pour $j = 1, \dots, k$, et on a vu dans la démonstration du lemme 1.1.7 que, si $\phi \in G(f, \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f))$, alors $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi) \in \mathfrak{S}(f)$ pour tout $j = 1, \dots, n$, d'où la conclusion (remarquer que si $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}(f)$, alors $\phi(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}(d)$).

La proposition 1.1.4 est ainsi démontrée puisque tout $m \in JG(f) = JG(f, \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f))$ s'écrit $m_1 m_2$ avec $m_1 \in J_1$, $m_2 \in J_2$.

1.1.9 Décomposition en produit de $G(f)$:

Soit $G_1(f)$ (resp. $G_2(f)$) l'image réciproque par

$$J : G(f) \rightarrow JG(f)$$

du sous-groupe J_1 (resp. J_2).

1.1.10 Proposition : Il existe un isomorphisme de $G(f)$ sur $J_1 \rtimes G_2(f)$.

1.1.11 Corollaire : L'inclusion naturelle

$$0(i, k-i) \rtimes G_2(f) \hookrightarrow G(f)$$

est une équivalence d'homotopie.

Le corollaire est une conséquence de ce que l'inclusion naturelle de $0(i, k-i)$ dans J_1 est une équivalence d'homotopie (la multiplication de M par λ , $0 \leq \lambda \leq 1$ définit une rétraction de déformation de J_1 sur $0(i, k-i)$).

1.1.12 Démonstration de la proposition 1.1.10 :

On va déduire de la section

$$\tau : J_1 \rightarrow G(f, \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f))$$

exhibée au lemme 1.1.5 une section au-dessus de J_1

$$\sigma : J_1 \rightarrow G(f)$$

du morphisme $J : G(f) \rightarrow JG(f)$.

On reprend pour cela la démonstration de la proposition 1.1.3. On remarque en premier lieu qu'il est possible de choisir continûment en fonction de M l'écriture de $g_M = f \phi_M - (f|u) \in \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f)(u)$ sous la forme

$g_M(x) = \sum_{j=1}^n X_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ avec $X_j \in \mathfrak{M}\mathfrak{S}(f)(u)$ pour tout $j = 1, \dots, n$. En effet, rappelons que

$$\phi_M = \text{identité} + (B(M)) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

où $B(M)$ est une $n \times n$ matrice dépendant de M (revoir la démonstration du lemme 1.1.5 : si on se limite à des valeurs de M dans un compact de $\mathcal{M}(n-k, k)$, on peut considérer les ϕ_M comme des éléments de $G[f, \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f)(u)]$ pour un u fixé). On écrit

$$\begin{aligned} (f \phi_M - f)(x) &= \frac{1}{2!} \sum_{\substack{u_i + u_j = 2 \\ i, j = 1, \dots, n}} ((\phi_M)_i(x) - x_i)^{u_i} ((\phi_M)_j(x) - x_j)^{u_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{\substack{u_i + u_j + u_l = 3 \\ i, j, l = 1, \dots, n}} ((\phi_M)_i(x) - x_i)^{u_i} ((\phi_M)_j(x) - x_j)^{u_j} ((\phi_M)_l(x) - x_l)^{u_l} \times I_M(x) \quad , \end{aligned}$$

avec $I_M(x) = \int_0^1 (1-t)^2 x \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} [x + t(\phi_M(x) - x)] dt$ et on remarque que les

$(\phi_M)_i(x) - x_i$ sont des combinaisons linéaires explicites des $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ et que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{U})$; il ne nous reste plus qu'à faire un choix (non canonique) d'une écriture adéquate de $\sum_{\substack{u_i + u_j = i \\ i, j = k+1, \dots, n}} (y_i - x_i)^{u_i} (y_j - x_j)^{u_j}$ (resp. de $\sum_{\substack{u_1 + \dots + u_n = 3 \\ i, j, \ell = 1, \dots, n}} (y_i - x_i)^{u_i} (y_j - x_j)^{u_j} (y_\ell - x_\ell)^{u_\ell}$) sous la forme $\sum_{s=1}^n z_s (y_s - x_s)$ pour avoir l'écriture cherchée de g_M .

Par la démonstration de la proposition 1.1.3 on associe continûment à g_M une famille à 1 paramètre $\{\Phi_t^M | t \in [0, 1]\}$ de difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$(f + t g_M) \Phi_t^M(x) = f(x) \quad \text{pour tout } t \in [0, 1] \quad ;$$

en particulier $f \phi_M \Phi_1^M(x) = f(x)$. On définit σ sur les 0-simplexes par $\sigma \begin{pmatrix} I & 0 \\ M & I \end{pmatrix} = \phi_M \Phi_1^M$, et $\sigma \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Pour montrer que σ se définit bien sur les p -simplexes, on raisonne comme pour le lemme 1.1.5, en utilisant la continuité de la solution d'une équation différentielle dépendant d'un paramètre dans $\mathbb{R}^p$ (voir [17], proposition 1, paragraphe 2, chapitre 6) et la compacité du p -simplexe type Δ^p .

La proposition 1.1.10 est ainsi démontrée ; sur les 0-simplexes, l'isomorphisme π de $G(f)$ sur $J_1 \times G_2(f)$ s'écrit $\pi(\varphi) = [m_1, (\sigma m_1)^{-1} \varphi]$, où $J \varphi = m_1 m_2$, $m_1 \in J_1$, $m_2 \in J_2$ (il est clair que cette décomposition est uniquement déterminée) ; l'isomorphisme inverse est $\pi^{-1}(m_1, \phi) = \sigma(m_1) \phi$. Nous pouvons maintenant concentrer notre attention sur $G_2(f)$; on commence par étudier $G_2(f, \mathfrak{M} \mathfrak{J}^2(f))$ (image réciproque de J_2 par $J : G(f, \mathfrak{M} \mathfrak{J}^2(f)) \rightarrow JG(f)$). Le lemme qui suit améliore le paragraphe 1.1.8.

1.1.13 Lemme : Soit $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in G_2(f, \mathfrak{M} \mathfrak{J}^2(f))$; pour tout $j = 1, \dots, k$, $\varphi_j - x_j \in \mathfrak{M} \mathfrak{J}(f)$.

Démonstration : Posons, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$,
 $Q(x) = q(\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)) - q(x_1, \dots, x_k)$
 $D(x) = d(\varphi_{k+1}(x), \dots, \varphi_n(x)) - d(x_{k+1}, \dots, x_n)$.

Par hypothèse, $Q + D \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$, et puisque $\mathfrak{J}(f) \subset \mathfrak{M}$, on en déduit que pour tout $j = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x_j} + \frac{\partial D}{\partial x_j} \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}(f) \quad .$$

D'autre part, pour tout $j = 1, \dots, n$, on a $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi) \in \mathfrak{J}(f)$ (voir démonstration du lemme 1.1.7), c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & \frac{\partial q}{\partial x_j}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \pm 2\varphi_j \in \mathfrak{J}(f) \quad \text{pour } j = 1, \dots, k \quad . \\ (2) & \frac{\partial d}{\partial x_l}(\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n) \in \mathfrak{J}(f) \quad \text{pour } l = k+1, \dots, n \quad . \end{array} \right.$$

Mais, si $j = 1, \dots, l$, $\frac{\partial D}{\partial x_j}(x) = \sum_{l=k+1}^n \frac{\partial d}{\partial x_l}(\varphi_{k+1}(x), \dots, \varphi_n(x)) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}(x)$. De (2), et du fait que $J\varphi \in J_2$, on déduit que, pour $j = 1, \dots, k$, $\frac{\partial D}{\partial x_j} \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}(f)$ et donc que, pour $j = 1, \dots, k$, $\frac{\partial Q}{\partial x_j} \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}(f)$.

Mais $\frac{\partial Q}{\partial x_j}(x) = \sum_{s=1}^k \frac{\partial q}{\partial x_s}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)) \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial q}{\partial x_j}(x)$. Puisque $J\varphi \in J_2$, on a $\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j}(x) = \delta_{sj} + R_{sj}(x)$, avec $R_{sj} \in \mathfrak{M}$. On en déduit que

$\frac{\partial Q}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial q}{\partial x_j}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)) - \frac{\partial q}{\partial x_j}(x) + R(x) = \pm 2(\varphi_j(x) - x_j) + R(x)$,
avec $R \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}(f)$ (utiliser (1)), et donc $\varphi_j - x_j \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}(f)$ pour $j = 1, \dots, k$.

1.1.14 Lemme : L'inclusion naturelle

$$G(d, \mathfrak{M}'\mathfrak{J}^2(d)) \xhookrightarrow{I} G_2(f, \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f))$$

est une équivalence d'homotopie^{*}.

* $\mathfrak{M}'$ désigne l'idéal maximal relatif aux fonctions de $\mathbb{R}^{n-k}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration : I est définie sur les 0-simplexes par $I\phi = \varphi$, où

$$\begin{cases} \varphi_j(x) = x_j & \text{pour } j = 1, \dots, k \\ \varphi_l(x) = \phi_l(x_{k+1}, \dots, x_n) & \text{pour } l = k+1, \dots, n. \end{cases}$$

On définit $R: G_2(f, \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f)) \rightarrow G(d, \mathfrak{M}'\mathfrak{S}^2(d))$ sur les 0-simplexes par $R\varphi = \phi$, où $\phi_l(x_{k+1}, \dots, x_n) = \phi_l(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$, $l = k+1, \dots, n$.

C'est une conséquence du lemme 1.1.13 que l'image de R est bien dans $G(d, \mathfrak{M}'\mathfrak{S}^2(d))$. La définition de R sur les p -simplexes est standard, et nous ne nous préoccupons plus, dans ce qui suit, des domaines de définition.

On vérifie que $RI = \text{identité}$, c'est-à-dire que R est une rétraction. Nous allons montrer que IR est homotope à l'identité ; si $\varphi \in G_2(f, \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f))$, et si on pose $\theta = IR(\varphi) \in G_2(f, \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f))$, on a

$$\begin{cases} \theta_j(x) = x_j & \text{pour } j = 1, \dots, k \\ \theta_l(x) = \varphi_l(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) & \text{pour } l = k+1, \dots, n. \end{cases}$$

Définissons $\varphi^\lambda \in \text{Diff}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, 0)$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$, par les formules

$$\begin{cases} \varphi_j^\lambda(x) = (1-\lambda)x_j + \lambda \varphi_j(x) & \text{pour } j = 1, \dots, k \\ \varphi_l^\lambda(x) = \varphi_l(\lambda x_1, \dots, \lambda x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) & \text{pour } l = k+1, \dots, n. \end{cases}$$

φ^λ est bien un difféomorphisme local car $(\varphi^\lambda)'(0) = \varphi'(0)$. D'autre part, $\varphi^0 = \theta$, et $\varphi^1 = \varphi$.

Il reste à voir que, pour tout λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, on a $\varphi^\lambda \in G(f, \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f))$ (on aura alors automatiquement $\varphi^\lambda \in G_2(f, \mathfrak{M}\mathfrak{S}^2(f))$, et l'équivalence d'homotopie sera en fait fibrée au-dessus de $J_2 \cong JG(d)$) : écrivons $\varphi^\lambda - f = Q^\lambda + D^\lambda$, avec $Q^\lambda = \varphi^\lambda - \varphi$, et $D^\lambda = d\varphi^\lambda - d$; posons $u_j(x) = \varphi_j(x) - x_j$, $j = 1, \dots, k$; il vient :

$$\begin{cases} Q^\lambda(x) = \lambda^2 q(u_1(x), \dots, u_k(x)) - 2\lambda \sum_{j=1}^i x_j u_j(x) + 2\lambda \sum_{j=i+1}^k x_j u_j(x) \\ D^\lambda(x) = D^1(\lambda x_1, \dots, \lambda x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{cases} .$$

On déduit du lemme 1.1.13 et de ce que $x_j \in \mathfrak{J}(f)$ pour $j = 1, \dots, k$, que $Q^\lambda \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$. D'autre part, par hypothèse, $Q^1 + D^1 \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$, donc $D^1 \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$; puisque $D^\lambda(x_1, \dots, x_n) = D^1(\lambda x_1, \dots, \lambda x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ on en déduit que $D^\lambda \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$ (ce serait faux si les λ étaient aussi devant les x_l , $l = k+1, \dots, n$, car alors $x_l \notin \mathfrak{J}(f)$). Le lemme 1.1.14 est ainsi démontré.

Cas où f a une singularité de codimension finie en 0 :

On suppose maintenant qu'il existe un entier $r < +\infty$, tel que $\mathfrak{J}(f) \supset \mathfrak{M}^r$. On a alors la proposition suivante, dans laquelle Γ désigne le complexe semi-simplicial des germes de difféomorphismes de $(\mathbb{R}^n, 0)$ dont le jet en 0 est l'identité, $\mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$ le complexe semi-simplicial des germes en 0 d'éléments de $\mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)(\mathcal{U})$, $0 \in \mathcal{U} \subset \Omega$, et $\mathfrak{F}$ le complexe semi-simplicial des germes en 0 d'applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. (Les structures semi-simpliciales sont définies comme au début de ce chapitre).

1.1.15 Proposition : Si f a en 0 une singularité de codimension finie, le morphisme de Γ dans $\mathfrak{F}$ défini sur les 0-simplexes par $\varphi \mapsto f\varphi - f$ (et sur les p -simplexes de manière analogue) possède une section au-dessus du sous-complexe $\mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$ de $\mathfrak{F}$.

Démonstration : $\mathfrak{J}(f)$ se décompose en somme directe de $\mathfrak{M}^r$ et d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, engendré par des polynômes de degré $\leq r-1$; on prend en effet comme générateurs tous les développements jusqu'à l'ordre $r-1$ des fonctions $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $j = 1, \dots, n$. Il est clair que si $g \in \mathfrak{J}(f)$, $g = g_1 + g_2$, $g_1 \in \mathfrak{M}^r$, $g_2 \in E$, alors g_1 et g_2 sont uniquement déterminés.

On en déduit qu'il est possible de fixer un choix (que l'on appellera canonique) de l'écriture d'un élément $g \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$ sous la forme

$g(x) = \sum_{j=1}^n X_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, avec $X_j \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}(f)$ pour tout $j = 1, \dots, n$: on commence par fixer une telle écriture si g est un des générateurs standard de $\mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$, puis on décompose $\mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$ de manière analogue à $\mathfrak{J}(f)$ en la somme de $\mathfrak{M}^{2r+1}$ et d'un espace vectoriel E' sur $\mathbb{R}$ de dimension finie engendré par des polynômes de degré $\leq 2r$. Puisque tout élément de $\mathfrak{M}^{2r+1}$ admet une écriture canonique en fonction des générateurs standard $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\sum \alpha_j = 2r+1$ (formules intégrales) il suffit de choisir une fois pour toutes une écriture de ces générateurs et des générateurs de E' en fonction des générateurs standard de $\mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$ (c'est possible car il n'y a qu'un nombre fini de choix à faire).

La proposition 1.1.15 se démontre alors à partir de la démonstration de la proposition 1.1.3 comme à la fin du paragraphe 1.1.12 en utilisant la continuité de la solution d'une équation différentielle dépendant d'un paramètre dans $\mathbb{R}^p$, et la compacité du p -simplexe Δ^p (sur les 0-simplices, on associe à $g \in \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$ une famille $\{\Phi_t | t \in [0, 1]\}$ de difféomorphismes locaux de $(\mathbb{R}^n, 0)$ ayant un jet identité et tels que $(f + tg)\Phi_t(x) = f(x)$; on a donc $g(x) = f\Phi_1^{-1}(x) - f(x)$).

Remarque : Le même énoncé est valable pour une fonction totalement dégénérée de codimension finie en remplaçant $\mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)$ par $\mathfrak{J}^2(f)$. C'est bien le cas de d , car si $\mathfrak{J}(f) \supset \mathfrak{M}^r$, on a $\mathfrak{J}(d) \supset (\mathfrak{M}')^r$.

1.1.16 Proposition : Si f a en 0 une singularité de codimension finie, l'inclusion naturelle

$$G(d) \hookrightarrow G_2(f)$$

est une équivalence d'homotopie.

Démonstration : On déduit de la proposition 1.1.15 (et de son analogue pour d) l'existence de rétractions

$$\rho_f : G_2(f, \mathfrak{M}\mathfrak{J}^2(f)) \rightarrow G_2(f)$$

et

$$\rho_d : G(d, \mathfrak{M}'\mathfrak{J}^2(d)) \rightarrow G(d)$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 G(\mathfrak{d}, \mathfrak{M}' \mathfrak{J}^2(\mathfrak{d})) & \xhookrightarrow{\quad \mathbf{I} \quad} & G_2(f, \mathfrak{M} \mathfrak{J}^2(f)) \\
 \rho_{\mathfrak{d}} \downarrow & & \downarrow \rho_f \\
 G(\mathfrak{d}) & \xhookrightarrow{\quad \mathbf{L} \quad} & G_2(f)
 \end{array}$$

L'application composée

$$G_2(f) \hookrightarrow G_2(f, \mathfrak{M} \mathfrak{J}^2(f)) \xrightarrow{\quad \mathbf{R} \quad} G(\mathfrak{d}, \mathfrak{M}' \mathfrak{J}^2(\mathfrak{d})) \xrightarrow{\quad \rho_{\mathfrak{d}} \quad} G(\mathfrak{d})$$

(où $\mathbf{R}$ a été définie dans la démonstration du lemme 1.1.14) est alors un inverse en homotopie de l'inclusion

$$\mathbf{L} : G(\mathfrak{d}) \hookrightarrow G_2(f) \quad ,$$

ce qui démontre la proposition 1.1.16. On déduit de 1.1.16 et 1.1.11 le

1.1.17 Théorème : Si f a en 0 une singularité de codimension finie, l'inclusion naturelle

$$O(i, k-i) \times G(\mathfrak{d}) \hookrightarrow G(f)$$

est une équivalence d'homotopie.

1.1.18 Remarque sur le cas où $f = q + \mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}$ = polynôme homogène de degré $r \geq 3$:

Dans ce cas, $JG(\mathfrak{d})$ est le sous-groupe de $GL(n-k; \mathbb{R})$ formé des éléments laissant $\mathfrak{d}$ invariant ; le morphisme $J : G(\mathfrak{d}) \rightarrow JG(\mathfrak{d})$ a donc une section globale , et J est une fibration triviale ; de plus, la fibre est acyclique, ce qui montre que l'inclusion $JG(\mathfrak{d}) \hookrightarrow G(\mathfrak{d})$ est une équivalence d'homotopie. On en déduit que $J : G(f) \rightarrow JG(f)$ est une fibration triviale (utiliser la section σ au-dessus de J_1 trouvée en 1.1.12).

De plus, la fibre de cette fibration est acyclique, car si φ est un 0-simplexe de $G(f)$ tel que $\varphi'(0) = \text{identité}$, et si on définit φ^λ , $\lambda \neq 0$, par les formules

$$\begin{cases} \varphi_j^\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^r} \varphi_j(\lambda^r x_1, \dots, \lambda^r x_k, \lambda^2 x_{k+1}, \dots, \lambda^2 x_n) & , \quad j = 1, \dots, k, \\ \varphi_l^\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^2} \varphi_l(\lambda^r x_1, \dots, \lambda^r x_k, \lambda^2 x_{k+1}, \dots, \lambda^2 x_n) & , \quad l = k+1, \dots, n, \end{cases}$$

on vérifie que $(\varphi^\lambda)'(0) = \text{identité}$, que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi^\lambda = \text{identité}$ (se rappeler que, si $j = 1, \dots, k$, on a $\varphi_j = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_j}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in \mathfrak{J}(f)$, ce qui montre que les termes ne contenant pas $x_1, \dots, x_k$ interviennent au moins avec le degré $(r-1)$), et que

$$(f \circ \varphi^\lambda - f)(x) = \frac{1}{2^r} (f \circ \varphi - f)(\lambda^r x_1, \dots, \lambda^r x_k, \lambda^2 x_{k+1}, \dots, \lambda^2 x_n) = 0.$$

On en déduit le théorème 1.1.17 sans condition de singularité isolée, ce qui généralise [11].

Les deux cas particuliers dont nous aurons à nous servir par la suite sont $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = q(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^r$, avec $r = 3$ ou 4 . On a dans ce cas une équivalence d'homotopie entre $G(f)$ et $0(i, n-i) \times JG(x_{n+1}^r)$.

Si r est impair, $JG(x_{n+1}^r)$ a un seul élément.

Si r est pair, $JG(x_{n+1}^r)$ a deux éléments.

1.2 Le lemme des familles élémentaires :

On reprend les principales notations de ([4], chapitre I, paragraphes 1 et 2). Soit $E = E^0 \cup E^1 \cup \dots \cup E^k$ un espace stratifié localement trivial au sens de Cerf ; on suppose que le modèle transverse M_k de la strate E^k de codimension k est une boule ouverte de dimension k dont la stratification est conique au point de vue topologique (remarquons que dans le cas qui nous intéresse, E est un Fréchet, et la stratification du modèle transverse est bien définie à difféomorphisme près). Notons N_k un voisinage

fermé dans M_k du point M_k^k (M_k^1 désigne la strate de codimension 1 de M_k) ; on munit N_k de la stratification induite par celle de M_k . (voir N.B.)

1.2.1 Définition : Soit $x \in E^1$, $n \in N_k^1$. Si $f: (N_k, n) \rightarrow (E, x)$ est un morphisme stratifié^{*} et si la restriction de f à un voisinage du point N_k^k est une carte transverse de E^k , on dit que f définit une famille à k paramètres de traversée de E^k de type N_k relative au couple (x, n) . (Par abus de langage on parlera de famille passant par x , ou d'origine x , sans mentionner le point n). Si on ne spécifie pas un couple (x, n) on parle simplement d'une famille à k paramètres de traversée de E^k de type N_k . Dans le cas des strates de codimension 1, une famille à 1 paramètre de traversée s'appelle encore un "bon chemin" de traversée.

On suppose maintenant qu'un groupe topologique G opère continûment dans E en respectant la stratification (et éventuellement les décompositions des strates en composantes distinguées).

On désigne par (a_i) (pour $i = 1, \dots, k$) la propriété suivante : "Pour tout $x \in E^i$, la strate de x coïncide au voisinage de x avec l'orbite de x , et l'application $g \mapsto g.x$ est une fibration localement triviale de G sur l'orbite de x " (voir [4]).

L'opération de G dans E définit de manière naturelle une opération de G dans l'espace $\mathcal{C}$ des familles à k paramètres de traversée de E^k de type N_k , muni de la topologie C^0 .

La proposition qui suit généralise la proposition 1 du paragraphe 2.2 de [4]. La démonstration est tout-à-fait similaire et nous ne la rappellerons que très succinctement.

^{*} Dans les cas que nous considérons, les strates E^1 sont en général décomposées en composantes E_α^1 , E_β^1 , etc... distinguées géométriquement. On appelle morphisme stratifié entre deux espaces stratifiés du même type un morphisme respectant ces décompositions.

N.B. La stratification de $\mathfrak{U}(W)$ est localement triviale mais seules les premières strates ont un modèle transverse stratifié côliquement.

1.2.2 Proposition (lemme des familles élémentaires) :

Soit $E = E^0 \cup E^1 \cup \dots \cup E^k$ un espace stratifié localement trivial dans lequel un groupe topologique G opère en vérifiant les conditions (a_{1_1}) et (a_{1_2}) ci-dessus ($1_1, 1_2 \leq k$) (pour le 2°] la condition (a_{1_1}) suffit).

Soit $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ deux parties de l'espace $\mathcal{C}$ des familles à k paramètres de traversée de E^k de type N_k , telles que $\mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}'$. On suppose que

(1) $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ sont stables pour les opérations de G dans $\mathcal{C}$. Pour tout couple (x, n) , $x \in E$, $n \in N_k$, on désigne par $\mathcal{C}'_{x,n}$ (resp. $\mathcal{C}''_{x,n}$) la partie de $\mathcal{C}'$ (resp. $\mathcal{C}''$) formée des familles de traversée $f: N_k \rightarrow E$ telles que $f(n) = x$.

1°] Soient $f \in \mathcal{C}''$, $n_1 \in N_k^{1_1}$, $n_2 \in N_k^{1_2}$; il existe, pour tout $j \geq 1$, un isomorphisme canonique :

$$\pi_j(\mathcal{C}'_{f(n_1)n_1}, \mathcal{C}''_{f(n_1)n_1}; f) \cong \pi_j(\mathcal{C}'_{f(n_2)n_2}, \mathcal{C}''_{f(n_2)n_2}; f) .$$

2°] Si la condition suivante est vérifiée :

$$(2) \quad \pi_o(\mathcal{C}'_{y,n_2}, \mathcal{C}''_{y,n_2}) = 0 \quad \text{pour tout } y \in E^{1_2}, \text{ alors}$$

$$\pi_o(\mathcal{C}'_{x,n_1}, \mathcal{C}''_{x,n_1}) = 0 \quad \text{pour tout } x \in E^{1_1} .$$

3°] Soient plus généralement $\tilde{\mathcal{C}}'$ et $\tilde{\mathcal{C}}''$ deux sous-complexes de Kan du complexe singulier $\mathcal{J}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$, tels que $\tilde{\mathcal{C}}'' \subset \tilde{\mathcal{C}}'$; on note $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ les 0-squelettes respectifs de $\tilde{\mathcal{C}}'$ et $\tilde{\mathcal{C}}''$. On suppose que

(1) $\tilde{\mathcal{C}}'$ et $\tilde{\mathcal{C}}''$ sont stables pour les opérations du groupe simplicial $\mathcal{J}(G)$ dans $\mathcal{J}(\mathcal{C})$.

Alors, si $f \in \mathcal{C}''$, $n_1 \in N_k^{1_1}$, $n_2 \in N_k^{1_2}$, il existe, pour tout $j \geq 1$, un isomorphisme canonique :

$$\pi_j(\tilde{\mathcal{C}}'_{f(n_1)n_1}, \tilde{\mathcal{C}}''_{f(n_1)n_1}; f) \cong \pi_j(\tilde{\mathcal{C}}'_{f(n_2)n_2}, \tilde{\mathcal{C}}''_{f(n_2)n_2}; f)$$

Si en plus on a

(2) $\pi_0(\tilde{\mathcal{C}}'_{y,n_2}, \tilde{\mathcal{C}}''_{y,n_2}) = 0$ pour tout $y \in E^{1,2}$, alors $\pi_0(\tilde{\mathcal{C}}'_{x,n_1}, \tilde{\mathcal{C}}''_{x,n_1}) = 0$ pour tout $x \in E^{1,1}$.

Démonstration : C'est celle de [4] dans laquelle on remplace les fibrations utilisées par les fibrations

$$p_2 : \mathcal{C} \rightarrow E^{1,2} \quad \text{et} \quad p_1 : \mathcal{C} \rightarrow E^{1,1}$$

définies par

$$p_2(f) = f(n_2) \quad \text{et} \quad p_1(f) = f(n_1) \quad .$$

Si $(a_{1,1})$ est vérifiée (resp. si $(a_{1,2})$ est vérifiée) les restrictions de p_1 (resp. p_2) à $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ sont encore des fibrations localement triviales.

La preuve du 3°] se déroule aussi comme dans [4]. Le modèle d'application de cette proposition est le suivant : tout d'abord, on choisit pour n_2 l'unique point de N_k^k ; l'espace $\mathcal{C}_{f(n_2),n_2}$ est l'espace des familles à k paramètres de type N_k de traversée de E^k en un point $f(n_2) \in E^k$. On prend pour $\mathcal{C}'$ une réunion de composantes connexes de $\mathcal{C}$, et on choisit $\mathcal{C}''$ (resp. $\tilde{\mathcal{C}}''$) en fonction de la structure locale de E au voisinage de E^k afin que $\mathcal{C}_{f(n_2),n_2}''$ (resp. $\tilde{\mathcal{C}}_{f(n_2),n_2}''$) ait les mêmes groupes d'homotopie que $\mathcal{C}_{f(n_2),n_2}'$ (resp. le complexe singulier de $\mathcal{C}_{f(n_2),n_2}'$) : les éléments de $\mathcal{C}''$ (resp. du 0-squelette de $\tilde{\mathcal{C}}''$) sont appelés "familles élémentaires de traversée de E^k de type N_k ". On déduit de la proposition 1.2.2 que l'espace, (resp. le complexe de Kan), des familles élémentaires de traversée de E^k d'origine $x \in E^1$ (plus exactement correspondant à un couple (n,x) , $n \in N_k^1$) a même type d'homotopie faible que l'espace des familles de traversée d'origine x et appartenant à $\mathcal{C}'$ (pourvu que (a_1) et (a_k) soient vérifiées).

Nous appliquerons en particulier la proposition 1.2.2 à $E = \mathfrak{F}(W)$ dans le cas où $k=2$, et où le modèle transverse N_2 est un voisinage fermé de

l'origine dans $\mathbb{R}^2$ stratifié comme sur la figure 1 (voir chapitre 1, paragraphe 6).

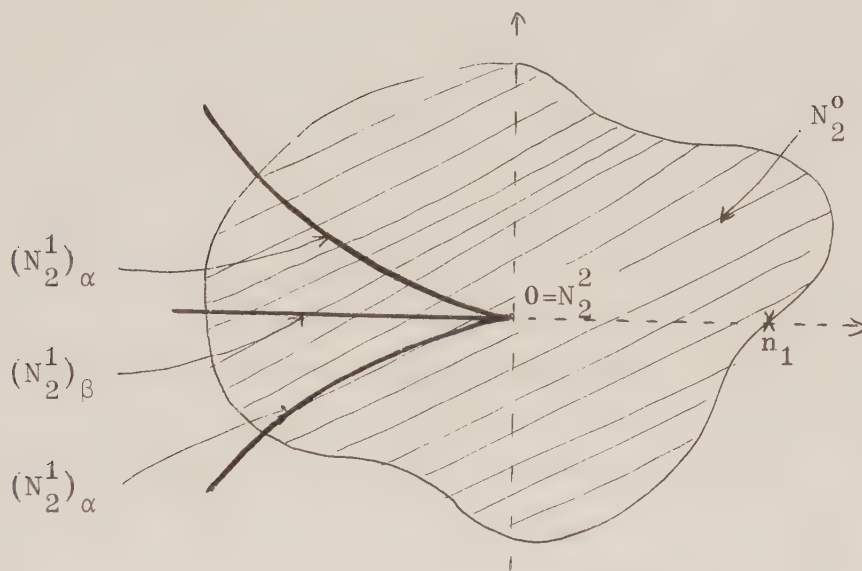


Figure 1 [On a hachuré N_2]

Le point n_1 sera pris sur la strate N_2^0 (voir figure 1) ou sur la strate $(N_2^1)_\beta$ (voir figure 2).

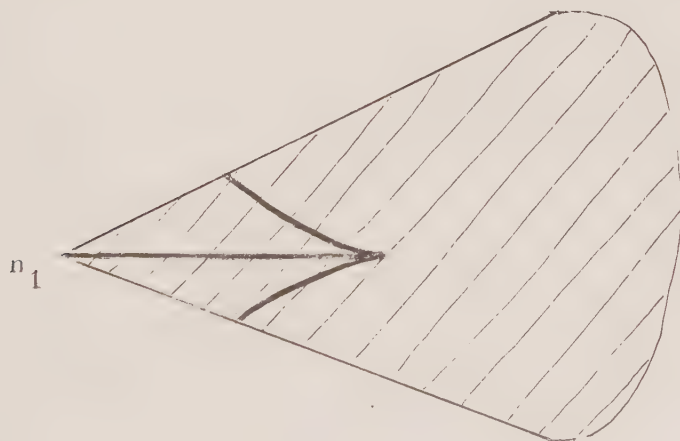


Figure 2 [On a hachuré N_2]

Dans ce dernier cas, pour avoir la propriété sur les π_0 , il suffira donc de vérifier (a_1) pour les strates E_β^1 (voir [4]). Pour la propriété sur les π_j , $j \geq 1$ il faut en plus vérifier (a_2) (voir [23]).

Le paragraphe 3.1 utilise aussi la proposition 1.2.2 dans un cas analogue, mais où la strate $(N_2^1)_\beta$ n'existe pas.

1.2.3 Remarque importante : en pratique on s'intéresse à des familles de traversée définies de manière plus générale que $\mathcal{C}$; par exemple, dans le cas particulier que l'on vient de voir, on voudrait raisonner sur des applications de D^2 (ou d'un domaine homéomorphe à D^2) dans E qui induisent sur D^2 une stratification isomorphe à celle de N_2 (autrement dit on veut se permettre des changements de paramétrage laissant fixe l'origine de la famille : comparer aux chemins de traversée dans lesquels on peut fixer ou non le temps auquel on traverse (voir [4])).

On peut montrer, à l'aide des théorèmes classiques de fibration, que les deux espaces de familles à deux paramètres de traversée issues d'un point donné ont même type faible d'homotopie.

1.3 Chemins élémentaires d'élimination

1.3.1 La fonction singulière standard :

On considère, pour chaque entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$

$$f = -x_1^2 \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^3 \quad .$$

Tout germe de fonction $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, admettant à l'origine une singularité isolée de codimension 1, est équivalent au germe de f pour un choix convenable de l'entier i [3] et [4].

Dans l'espace $\mathfrak{F}$ des fonctions C^∞ définies sur une variété le sous-espace $\mathfrak{F}_\alpha^1$ des fonctions dont toutes les valeurs critiques sont distinctes et tous les points critiques non dégénérés, sauf un qui est de codimension 1, est une réunion de strates de codimension 1 ; la stratification est localement triviale au voisinage de $\mathfrak{F}$; les éléments de $\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_\alpha^1$ sont des fonctions de Morse.

La famille $f_\lambda = f + \lambda x_{n+1} + \lambda^2 x_{n+1}^2$, $\lambda \in [-1, +1]$, est un déploiement universel de la fonction singulière (voir [26] et [27] pour la notion de déploiement universel). C'est un chemin dans l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^{n+1}$, qui coupe transversalement en f la strate $\mathfrak{F}_\alpha^1$. Si $\lambda > 0$, f_λ est sans point critique ; si $\lambda < 0$, f_λ a deux points critiques, qui sont quadratiques non dégénérés ; leurs coordonnées sont

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \quad , \quad x_{n+1} = \frac{-\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 3\lambda}}{3} .$$

Celui de dernière coordonnée négative est d'indice $i+1$ et l'autre d'indice i . Pour $\lambda < 0$, la nappe de gradient descendant du point d'indice $i+1$ jusqu'au niveau $f_\lambda = 0$ est contenue dans le sous-espace vectoriel $x_{i+1} = \dots = x_n = 0$; la nappe de gradient montant du point d'indice i jusqu'au niveau $f_\lambda = 0$ est contenue dans le sous-espace vectoriel $x_1 = \dots = x_i = 0$. Elles se rencontrent donc transversalement et en un seul point, l'origine.

Ce modèle pour un chemin de traversée d'une strate de codimension 1 ne peut malheureusement pas être conservé car la déformation f_λ n'est pas à support compact et, par conséquent, ne peut être définie sur une variété.

1.3.2 Un modèle à support compact :

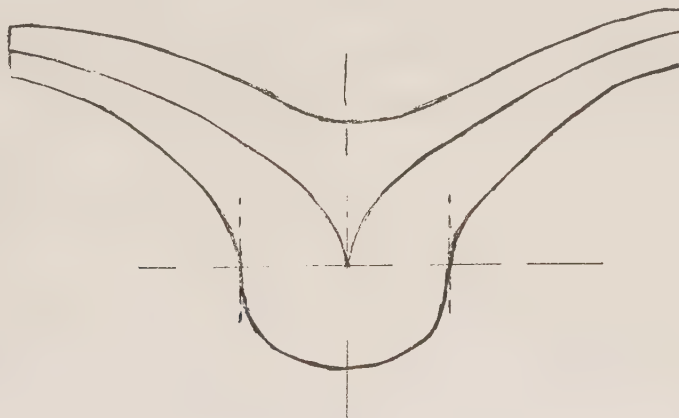
Dans la suite on note $r_1^2 = x_1^2 + \dots + x_i^2$, $r_2^2 = x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2$ et $q = -r_1^2 + r_2^2$.

On considère la variété compacte à bord anguleux (cf. fig. 3)

$$B = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -1 \leq f \leq +1, r_1^2 + r_2^2 \leq 2\} .$$

La face latérale de B , c'est-à-dire les points de B tels que $r_1^2 + r_2^2 = 2$, coupe transversalement les surfaces de niveau de f . Dans la suite, on notera $[O(i) \times O(n-i)]^+$ le sous-groupe de $O(i) \times O(n-i)$ formé des éléments de déterminants positifs ; son action sur les n premières variables en fait un groupe de symétries de B .

$n=1$



$n=2$

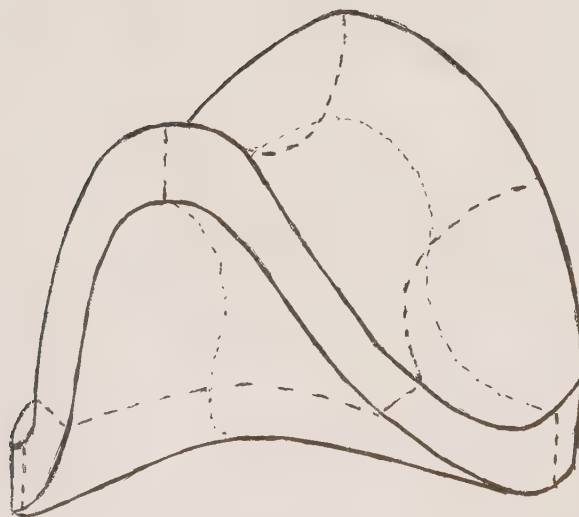


Figure 3

[Les intersections visibles de B avec les plans de coordonnées sont en pointillés sauf si elles font partie du contour apparent.]

On choisit, une fois pour toutes, deux fonctions C^∞ $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ ayant les graphes indiqués sur la figure 4 :

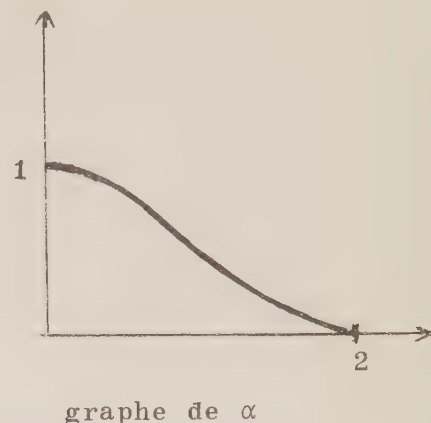
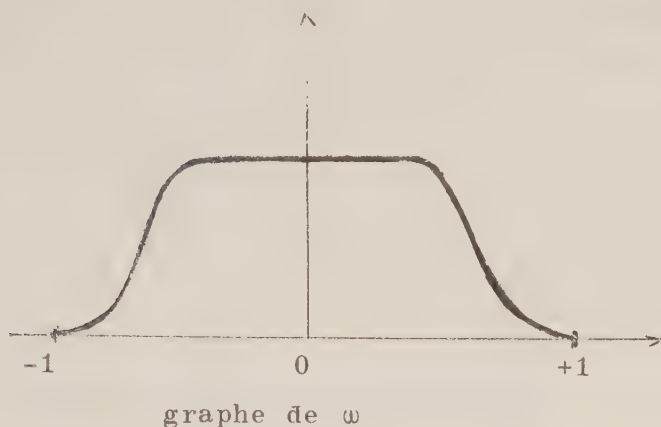


Figure 4

Le support de ω est $[-1, +1]$ et ω est égal à 1 sur un voisinage de l'origine. Le support de α est $[0, 2]$ et $\alpha-1$ est plate à l'origine ; de plus α est strictement décroissante. Considérons maintenant la famille de fonctions

$$\bar{f}_\lambda = f + \omega(f) \alpha(r_1^2 + r_2^2) [\varepsilon \lambda x_{n+1} + \varepsilon^2 \lambda^2 x_{n+1}^2] \quad , \quad \lambda \in [-1, +1] \quad ,$$

où $\varepsilon > 0$ sera choisi convenablement pour satisfaire aux propriétés suivantes.

1.3.3 Propriétés :

(1) Le support de la déformation est exactement B.

(2) Les points critiques de $\bar{f}_\lambda$, s'ils existent, ne peuvent se trouver que sur le dernier axe, à condition que ε soit assez petit. Sur l'intervalle de cet axe où $\omega(x_{n+1}^3) = 1$, $\bar{f}_\lambda = f_{\varepsilon\lambda}$; si ε est assez petit, l'intervalle en question contient les points critiques de $f_{\varepsilon\lambda}$ pour $\lambda \in [-1, +1]$.

Par ailleurs $\bar{f}_\lambda$ coïncide avec f sur $\mathbb{R}^{n+1} - B$ et n'a donc aucun point critique dans ce domaine. Enfin, si ε est assez petit, $\bar{f}_\lambda$ n'a pas de point critique parmi les points du dernier axe appartenant à B et tels que

$\omega(x_{n+1}^3) < 1$. En conclusion, pour ε assez petit, les points critiques de $\bar{f}_\lambda$ et ceux de $f_{\varepsilon\lambda}$ sont les mêmes pour tout $\lambda \in [-1, +1]$.

(3) Soit Φ un difféomorphisme^{*} de B laissant $\bar{f}_\lambda$ invariant pour tout $\lambda \in [-1, +1]$. Alors Φ laisse invariant séparément f , $\alpha(r_1^2 + r_2^2)x_{n+1}$ et $\alpha(r_1^2 + r_2^2)x_{n+1}^2$, donc aussi x_{n+1} , comme quotient des deux fonctions précédentes, ainsi que $\alpha(r_1^2 + r_2^2)$ et $f - x_{n+1}^3 = -r_1^2 + r_2^2$. Puisque α sépare les points $r_1^2 + r_2^2$ est invariant et, par conséquent, r_1^2 et r_2^2 le sont aussi.

Finalement Φ conserve r_1^2 , r_2^2 et x_{n+1} .

De plus, l'espace $G_o(B)$ des difféomorphismes de B conservant r_1^2 , r_2^2 et x_{n+1} se rétracte par déformation sur $[0(i) \times 0(n-i)]^+$.

Soit $\Phi \in G_o(B)$; pour tout $t \in]0, 1]$, la formule $\Phi_t(x) = \frac{1}{t} \Phi(tx)$ définit un élément $\Phi_t \in G_o(B)$ et $\Phi_o = \Phi'(0) \in [0(i) \times 0(n-i)]^+$; autrement dit, la rétraction classique de $\text{Diff}(\mathbb{R}^{n+1})$ sur $\text{GL}(\mathbb{R}^{n+1})$ induit une rétraction par déformation de $G_o(B)$ sur $[0(i) \times 0(n-i)]^+$.

(4) Pour tout $\lambda \in [-1, +1]$, $\bar{f}_\lambda(B) = [-1, +1]$. Si $\lambda \in]0, 1[$, c'est évident puisque $\bar{f}_\lambda$ est sans point critique. Si $\lambda \in [-1, 0[$ et si $i = 0, n$, il se pourrait que $\bar{f}_\lambda$ ait un extremum de module plus grand que 1. Mais en ce point $\bar{f}_\lambda = f_{\varepsilon\lambda}$ et on sait que les valeurs critiques de cette dernière appartiennent à $[-1, +1]$ si ε est assez petit.

(5) Soient Φ un difféomorphisme de B et φ un difféomorphisme de $[-1, +1]$, tels que, pour tout $\lambda \in [-1, +1]$, $\bar{f}_\lambda \Phi = \varphi \bar{f}_\lambda$. Alors φ est l'identité et $\Phi \in G_o(B)$. Si $x \in \text{int } B$, désignons par $I_x = \text{int } \{\bar{f}_\lambda(x); \lambda \in [-1, +1]\}$; on observe que $]-1, +1[= \bigcup \{I_x; x \in \text{int } B\}$; pour le voir on peut par exemple remarquer que, puisque ε est petit, le polynôme du second degré en λ $\bar{f}_\lambda(x)$ n'a pas de point critique pour $\lambda \in [-1, +1]$, si $x_{n+1} \neq 0$.

* On ne considèrera dans ce paragraphe que des difféomorphismes conservant l'orientation, même si cela n'est pas précisé.

Lemme : Si $x', x'' \in \text{int } B$, $I_{x'} \cap I_{x''}$ non vide, et si φ est l'identité sur $I_{x'}$, alors φ est l'identité sur $I_{x''}$.

Preuve : $\varphi(\bar{f}_\lambda(x''))$ est un polynôme du second degré en λ , à savoir $\bar{f}_\lambda(\varphi(x''))$. D'autre part, par hypothèse, il coïncide avec le polynôme $\bar{f}_\lambda(x'')$ sur un intervalle ouvert. Cela implique que, pour tout $\lambda \in [-1, +1]$, $\bar{f}_\lambda(x'') = \varphi(\bar{f}_\lambda(x''))$; c'est-à-dire que φ est l'identité sur $I_{x''}$. cqfd

Ce lemme implique que si φ est l'identité sur un sous-intervalle de $[-1, +1]$, φ est l'identité sur $] -1, +1[$ et donc sur $[-1, +1]$. Or, pour tout λ , φ conserve les valeurs critiques de $\bar{f}_\lambda$, ce qui montre que φ est l'identité sur un voisinage de l'origine.

(6) B est difféomorphe à $D^n \times [0, 1]$.

On observe d'abord que la face supérieure de B, c'est-à-dire $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f=1, r_1^2 + r_2^2 \leq 2\}$, se projette homéomorphiquement sur le disque de rayon $\sqrt{2}$ dans le plan $x_{n+1} = 0$. Donc cette face supérieure est difféomorphe à D^n ; cela résulte, suivant le courage du lecteur, soit de la théorie du lissage, soit d'une preuve élémentaire qu'il serait fastidieux d'écrire.

Par ailleurs, la fonction $\bar{f}_1$, qui est sans point critique, a ses surfaces de niveaux qui rencontrent transversalement la face latérale de B. Enfin les faces inférieures et supérieures de B sont dans des surfaces de niveaux de la fonction sans point critique $\bar{f}_1$. Ces arguments suffisent pour justifier notre affirmation.

1.3.4 Rétractions du modèle adaptées à f et questions connexes :

Notons $B(R)$ la variété à bord anguleux $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid r_1^2 + r_2^2 \leq 2R, -R \leq f \leq +R\}$. Comme pour $B(1) = B$, la face latérale de $B(R)$ coupe transversalement les variétés de niveau de f .

1.3.5 Proposition : Soit $0 < R_0 < 1$. Pour tout $R \in]R_0, 1]$, il existe des difféomorphismes $K_R : B \rightarrow B(R)$ et $k_R : [-1, +1] \rightarrow [-R, +1]$ tels que

$$1) \quad f \circ K_R = k_R \circ f$$

$$2) \quad K_R|_{B(R_0)} = \text{Id}|_{B(R_0)}$$

$$3) \quad \text{si } R = 1, K_R = \text{Id}|_B$$

4) le couple (K_R, k_R) est isotope à $(\text{Id}|_B, \text{Id}|_{[-1, +1]})$ dans $\text{Plgt}(B, \mathbb{R}^{n+1}) \times \text{Plgt}([-1, +1], \mathbb{R})$ parmi les couples de plongements vérifiant 1) et 2).

Démonstration

A - On choisit d'abord pour k_R une fonction dont le graphe est représenté sur la figure 5 :

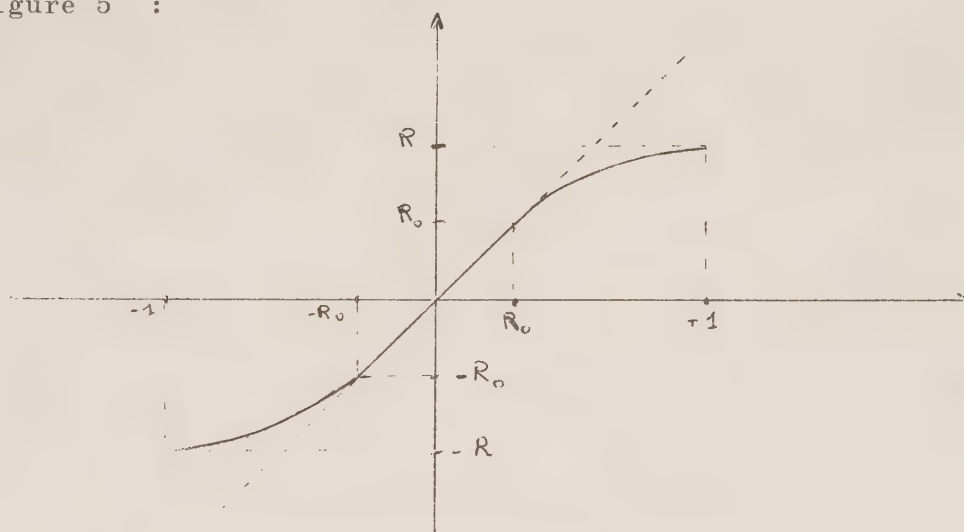


Figure 5

La fonction $\varphi(t) = k_R(t)/t$ a le graphique représenté sur la figure 6 :

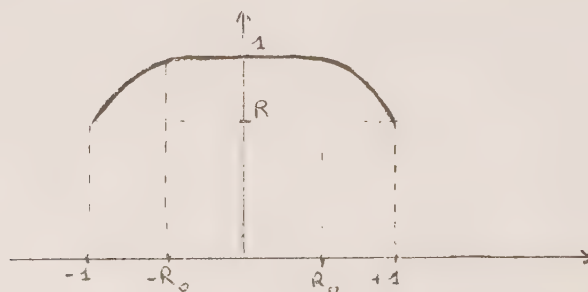


Figure 6

Définissons $\hat{K}_R : f^{-1}([-1, +1]) \rightarrow f^{-1}([-R, +R])$ par

$$\hat{K}_R(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1 \varphi(f)^{1/2}, \dots, x_n \varphi(f)^{1/2}, x_{n+1} \varphi(f)^{1/3}).$$

On voit sur ces formules que $\hat{K}_R$ est C^∞ et admet un inverse C^∞ . De plus $\hat{K}_R$ possède les propriétés suivantes :

- $f \hat{K}_R = f \varphi(f) = k_R f$
- $\hat{K}_R|_{B(R_0)} = \text{Id}$
- $\hat{K}_R$ dépend continûment de R et vaut $\text{Id}|_{f^{-1}([-1, +1])}$ si $R = 1$. En particulier $(\hat{K}_R, k_R)$ vérifie le 4).

B - Cependant $\hat{K}_R(B)$ et $B(R)$ ne coïncident pas ; seules leurs faces extrêmes coïncident et tous les deux contiennent $B(R_0)$ en leur intérieur. Nous allons prouver qu'il existe un difféomorphisme H de $\mathbb{R}^{n+1}$, conservant f , égal à l'identité sur $B(R_0)$, isotope à l'identité parmi les difféomorphismes possédant ces propriétés, et tel que $H\hat{K}_R(B) = B(R)$. On pose $K_R = H\hat{K}_R|_B$; le couple (K_R, k_R) vérifie toutes les conditions de l'énoncé.

Existence de H : On commence par éliminer le point critique de f par une déformation à support dans $B(R_0)$; soit g la nouvelle fonction. On remarque que $\hat{K}_R(B)$ et $B(R)$ sont deux cylindres adaptés à g , compris entre deux mêmes niveaux. L'existence de H résulte alors d'arguments classiques, que nous allons d'ailleurs rappeler dans la proposition suivante.

Par le même genre d'arguments on peut en effet obtenir le résultat suivant :

1.3.6 Proposition : Soit $\Phi : S^k \times B(R) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une famille à k paramètres de plongements de $B(R)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant la condition :

- (1) pour tout $u \in S^k$, $f \Phi_u = f$.

Soient R_0, R'_0 tels que, pour tout $u \in S^k$,

$$(2) \quad \Phi_u(B(R'_0)) \subset B(R_0) \subset \Phi_u(B(R)).$$

Alors il existe une déformation de Φ à Ψ , triviale sur $B(R'_0)$, telle qu'au cours de la déformation les relations (1) et (2) ci-dessus restent satisfaites et que, pour tout $u \in S^k$, $\Psi_u(B(R)) = B(R)$.

Démonstration : Nous allons construire une k -isotopie $H: S^k \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ parmi les difféomorphismes de $\mathbb{R}^{n+1}$ conservant f et égaux à l'identité sur $B(R_0)$; cette k -isotopie est isotope à la k -isotopie triviale parmi les k -isotopies permises, et, pour tout $u \in S^k$, $H_u \Phi_u(B(R)) = B(R)$. La famille $\Psi_u = H_u \Phi_u$ vérifiera alors les conditions demandées.

Soit g une fonction sans point critique, obtenue à partir de f par une déformation à support dans $B(R_0)$. On choisit sur $\mathbb{R}^{n+1}$ une métrique riemannienne pour laquelle $B(R_0)$ est un cylindre de gradient de la fonction g .

Il existe alors, dans les k -isotopies permises, un chemin H^t , $t \in [0, 1]$, tel que H^0 soit la k -isotopie triviale et que, pour tout $u \in S^k$, $H_u^1 \Phi_u(B(R))$ soit un cylindre de gradient pour la fonction g , admettant $\Phi_u(B(R)) \cap \{g=0\}$ pour section. Désignons par D_u le disque supérieur de $H_u^1 \Phi_u(B(R))$ et par Δ l'intersection avec la surface $\{g=R\}$ des lignes de gradient de g issues de $B(R_0)$. On sait que $D_u \supset \Delta$. Puisque la surface $\{g=R\}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, la proposition résulte alors immédiatement du lemme suivant.

1.3.7 Lemme : Soit $\Lambda: S^k \times D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une famille à k paramètres de plongements de D^n dans $\mathbb{R}^n$ et soit Δ un disque dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que, pour tout $u \in S^k$, le disque $\Lambda_u(D^n)$ contient Δ . Alors il existe une k -isotopie h de difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ égaux à l'identité sur Δ , isotope à la k -isotopie triviale parmi les k -isotopies permises, et telle que, pour tout $u \in S^k$, les plongements $h_u \Lambda_u: D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ aient même image.

Preuve : On peut se ramener au cas où $\Lambda_u(0) = 0 = \text{centre de } \Delta$.

1°) Si Λ_u est linéaire, le lemme est évident.

2°) Cas général : posons $\Lambda_u^t(x) = \frac{1}{t} \Lambda_u(tx)$ si $t \neq 0$

$$\Lambda_u^0(x) = \Lambda'_u(0) x .$$

Il existe $\mu > 0$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petits, tels que $\Lambda_u^t(D^n) \supset_{\mu} \Delta$, pour $t \in [0, 1]$, et que $\Lambda_u^t(D^n) \supset \Delta$ pour $t \in [1-\varepsilon, 1]$. Soit $\alpha(t)$ une fonction C^∞ dont le graphe est représenté sur la figure 7 :

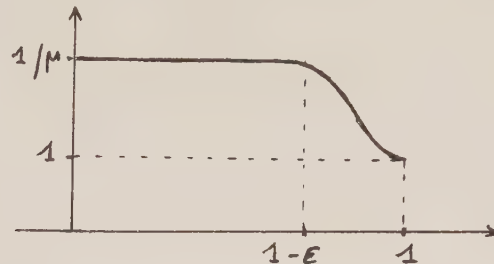


Figure 7

Alors $\alpha(t) \Lambda_u^t(D^n) \supset \Delta$ pour $t \in [0, 1]$; $\alpha(0) \Lambda_u^0$ est linéaire et $\alpha(1) \Lambda_u^1 = \Lambda_u$.

Complément : On peut donner une version relative de la proposition 1.3.6. On part d'une famille $\Phi : D^k \times B(R) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ telle que, pour $u \in \partial D^k$, $\Phi_u(B(R)) = B(R)$. Alors on peut déformer Φ , rel. ∂D^k , pour que la même condition soit satisfaite pour tout $u \in D^k$.

1.3.8 Plongements adaptés à la fonction singulière :

On utilisera les notations suivantes :

$G(B)$ (resp. $G(B(R))$) est l'espace des difféomorphismes de B (resp. de $B(R)$) qui laissent invariante la fonction

$$f = -x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^3, \text{ notée encore } -r_1^2 + r_2^2 + x_{n+1}^3 .$$

$G_0(B)$ est l'espace des difféomorphismes de B qui conservent r_1^2, r_2^2 et x_{n+1} .

$\mathcal{P}(B)$ est l'espace des plongements adaptés à f de B dans $\mathbb{R}^{n+1}$; par définition, $\Phi \in \mathcal{P}(B)$ s'il existe un plongement croissant $\varphi : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f \circ \Phi = \varphi \circ f$; un tel φ s'il existe est unique ; c'est pourquoi un plongement adapté sera souvent noté (Φ, φ) . $\mathcal{P}(B)$ est muni de la topologie C^∞ et l'application $(\Phi, \varphi) \rightarrow \varphi$ de $\mathcal{P}(B)$ dans $\text{Plgt}^+([-1, +1], \mathbb{R})$ est continue.

$\mathcal{P}_0(B) \subset \mathcal{P}(B)$ est défini par la condition : $\Phi \in \mathcal{P}_0(B)$ si $f \circ \Phi = f$.

Puisque l'origine est un point singulier isolé, si $\Phi \in \mathcal{P}(B)$, on a $\Phi(0) = 0$; on note alors G l'ensemble des germes à l'origine des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^{n+1}$ conservant f . On a un morphisme naturel de restriction $\rho : \mathcal{P}_0(B) \rightarrow G$, où on munit G de la structure de complexe semi-simplicial définie au paragraphe 1.1 ; avec les notations de ce paragraphe $G = G(f)$.

Comme en 1.1, si X est un espace topologique et Y un complexe semi-simplicial, on se permettra d'écrire $f : X \rightarrow Y$ (resp. $g : Y \rightarrow X$) à la place de $f : \mathcal{A}(X) \rightarrow Y$ (resp. $g : Y \rightarrow \mathcal{A}(X)$) pour désigner un morphisme semi-simplicial du complexe singulier différentiable $\mathcal{A}(X)$ de X dans Y (resp. de Y dans $\mathcal{A}(X)$).

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 G_0(B) & \hookrightarrow & \mathcal{P}_0(B) & \xrightarrow{\rho} & G \\
 \updownarrow & & & & \downarrow \\
 [0(i) \times 0(n-i)]^+ & \hookrightarrow & & & SO(i, n-i)
 \end{array}$$

(*)

dans lequel la flèche $G \rightarrow SO(i, n-i)$ associe à tout élément de G son 1-jet à l'origine.

1.3.9 Proposition : Le morphisme $\rho : \mathcal{P}_0(B) \rightarrow G$ est une fibration de Kan de fibre acyclique.

1.3.10 Corollaire : Les inclusions naturelles

$$[0(i) \times 0(n-i)]^+ \hookrightarrow G_o(B) \hookrightarrow \mathcal{P}_o(B)$$

sont des équivalences d'homotopie faibles.

Preuve du corollaire 1.3.10 :

D'après le théorème 1.1.17 (voir aussi le § 1.1.18) l'application 1-jet à l'origine $G \rightarrow S0(i, n-i)$ est une équivalence d'homotopie faible. D'autre part, d'après (1.3.3 propriété (3)), $[0(i) \times 0(n-i)]^+ \hookrightarrow G_o(B)$ est une équivalence d'homotopie ainsi que $[0(i) \times 0(n-i)]^+ \hookrightarrow S0(i, n-i)$. Sachant que ρ est une équivalence d'homotopie faible, le corollaire découle de la commutativité du diagramme (*).

Démonstration de la proposition 1.3.9 :

Puisque $G(B)$ agit sur $\mathcal{P}_o(B)$, pour prouver que ρ est une fibration de Kan, il suffit de prouver que $\rho|G(B) : G(B) \rightarrow G$ est une fibration de Kan. Or ceci résulte clairement des deux faits suivants :

1°) Tout k -simplexe de G peut être représenté, d'après la proposition 1.3.6, par un k -simplexe de $G(B(R))$. D'après la proposition 1.3.5, étant donné $R_o < R$, il existe un k -simplexe de $G(B)$ qui a même restriction à $B(R_o)$ que le précédent.

2°) Le sous-groupe de $G(B)$, formé des difféomorphismes dont le germe à l'origine est l'identité, agit simplement transitivement dans chaque fibre de $\rho|G(B)$.

Montrons l'acyclicité de la fibre de ρ . Soit $\Phi : S^k \rightarrow \mathcal{P}_o(B)$; dire que l'image de Φ est dans la fibre de ρ , c'est dire qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout $u \in S^k$, $\Phi_u|B(R) = \text{Id}|B(R)$. Déformer Φ jusqu'à la famille triviale, tout en conservant la relation ci-dessus, est une opération très simple : regarder, par exemple, la démonstration de 1.3.6 et 1.3.7.

1.3.11 Proposition : La projection naturelle $\mathcal{P}(B) \rightarrow \text{Plgt}^+([-1, +1], \mathbb{R})$ est une fibration de Kan^{*}, de base acyclique et dont la fibre est $\mathcal{P}_0(B)$. Donc $G_0(B) \hookrightarrow \mathcal{P}(B)$ est une équivalence d'homotopie faible.

Démonstration : Introduisons l'espace $\text{Diff}_{\text{ad}}^+(B)$ des difféomorphismes de B adaptés à f et conservant l'orientation. On se ramène immédiatement à prouver que $\text{Diff}_{\text{ad}}^+(B) \rightarrow \text{Diff}^+([-1, +1])$ est une fibration de Kan. Or, la fibre de cette application étant un groupe, il suffit de trouver une section au-dessus de chaque simplexe de la base. A l'aide d'un lemme de recollement écrit par Cerf pour prouver la proposition 1 de l'appendice de [4], mais non publié (pauvre lecteur de la référence précédente !), il suffit de prouver le lemme local suivant :

Soit $a \in B$; il existe une application semi-simpliciale $\phi \mapsto \Psi_\phi$ de $\text{Diff}^+(\mathbb{R})$ dans $\text{Diff}_{\text{loc}}^+(\mathbb{R}^{n+1}, a)$ telle que $\phi f = f \Psi_\phi$ et $\Psi_{\text{Id}} = \text{Id}$.

Si $a \neq 0$, ce lemme est une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites. Si a est le point critique de f nous allons utiliser la proposition 1.1.15.

On rappelle les notations : $\mathfrak{M}$ est l'idéal maximal de l'anneau des germes en 0 de fonctions de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathfrak{J}(f)$ est l'idéal jacobien de f . On calcule que si $\phi'(0) = 1$, alors $\phi f - f \in \mathfrak{M} \mathfrak{J}^2(f)$; dans ce cas la section Ψ_ϕ est celle donnée par la proposition 1.1.15. Par ailleurs si ϕ est linéaire, disons la multiplication par $k > 0$, alors $\Psi_\phi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1 \sqrt{k}, \dots, x_n \sqrt{k}, x_{n+1} \sqrt[3]{k})$. En combinant les deux résultats, on trouve la section $\phi \mapsto \Psi_\phi$.

1.3.12 Chemins élémentaires de traversée des strates de naissance :

Soient W une variété compacte de dimension $n+1$ et $F: W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ , dont tous les points critiques sont de Morse sauf un, c , au voisinage duquel, dans un système de coordonnées convenable, on a

$$F(x) = F(c) - x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^3.$$

* Il s'agit bien entendu des complexes singuliers des espaces en cause.

On note $\mathcal{P}_F$ l'espace des plongements de B dans W, adaptés à f et F ; par définition $\bar{\Phi} \in \mathcal{P}_F$ s'il existe $\varphi \in \text{Plgt}^+([-1, +1], \mathbb{R})$ tel que $F \bar{\Phi} = \varphi f$. Comme il a déjà été dit, on utilisera souvent la notation $(\bar{\Phi}, \varphi)$. $\mathcal{P}_F$ étant muni de la topologie C^∞ , il est immédiat de voir que $\mathcal{P}_F$ a le type d'homotopie de $\mathcal{P}(B)$.

Pour $\lambda \in [-1, +1]$, définissons $F_\lambda : W \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F_\lambda(x) = F(x) \quad , \quad \text{si } x \notin \bar{\Phi}(B),$$

$$F_\lambda(x) = \varphi \bar{f}_\lambda \bar{\Phi}^{-1}(x) \quad , \quad \text{si } x \in \bar{\Phi}(B), \quad (\bar{f}_\lambda \text{ est défini en 1.3.2}).$$

Parcouru dans le sens naturel, $\{F_\lambda; \lambda \in [-1, +1]\}$ est un chemin d'élimination d'un couple de points critiques. Dans l'autre sens c'est un chemin de naissance. On appellera un tel chemin "chemin élémentaire de traversée" de la strate de naissance en F.

On a donc une application de $\mathcal{P}_F$ sur l'ensemble $\mathcal{E}l_F$ des chemins élémentaires de naissance. Si on munit $\mathcal{E}l_F$ de la topologie C^0 , cette application est continue.

1.3.13 Proposition : Deux plongements adaptés $(\bar{\Phi}_1, \varphi_1)$ et $(\bar{\Phi}_2, \varphi_2)$ définissent le même chemin élémentaire si et seulement si

$$1^\circ) \quad \varphi_1 = \varphi_2$$

$$2^\circ) \quad \text{il existe } \psi \in G_0(B) \text{ tel que } \bar{\Phi}_2 = \bar{\Phi}_1 \psi.$$

Preuve : Le support de la déformation F_λ , $\lambda \in [-1, +1]$, étant à la fois $\bar{\Phi}_1(B)$ et $\bar{\Phi}_2(B)$, on doit avoir $\bar{\Phi}_1(B) = \bar{\Phi}_2(B)$, et donc $\varphi_1([-1, +1]) = \varphi_2([-1, +1])$. Alors, pour tout $\lambda \in [-1, +1]$, on a

$$\varphi_1^{-1} \varphi_2 \bar{f}_\lambda = \bar{f}_\lambda \bar{\Phi}_1^{-1} \bar{\Phi}_2.$$

D'après (1.3.3 propriété (5)), $\varphi_1^{-1} \varphi_2 = \text{Id} \mid [-1, +1]$ et $\bar{\Phi}_1^{-1} \bar{\Phi}_2 \in G_0(B)$, ce qui démontre la proposition.

Soit $\mathcal{C}$ l'espace, muni de la topologie C^0 , des bons chemins de traversée de la strate de naissance $\mathfrak{S}_\alpha^1(W)$. Soit $\mathcal{E}l$ le sous-espace des chemins élémentaires. On appelle $\widetilde{\mathcal{E}l}_F$ le sous-complexe du complexe singulier de $\mathcal{E}l$, image du complexe singulier de $\mathcal{P}_F$.

Le complexe singulier de $G_0(B)$ agit simplement transitivement dans les fibres du morphisme $\mathcal{P}_F \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}l}_F$, ce qui montre que $\widetilde{\mathcal{E}l}_F$ est un complexe de Kan et que $\mathcal{P}_F \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}l}_F$ est une fibration de Kan.

De la proposition 1.3.11, on déduit le

1.3.14 Théorème : Le complexe de Kan $\widetilde{\mathcal{E}l}_F$ des chemins élémentaires de traversée de $\mathfrak{S}_\alpha^1(W)$ en F est acyclique.

1.3.15 Conséquences du théorème 1.3.14 :

Soit $h: W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse possédant un couple de points critiques (c_1, c_2) en position de s'éliminer. Soit $\mathcal{C}(h, c_1, c_2)$ l'espace des chemins d'origine h dans $\mathfrak{S}(W)$ réalisant l'élimination de c_1 et c_2 . Si on remplace $\mathcal{P}_F$ par l'espace $\mathcal{P}_h$ des plongements adaptés à $\bar{f}_{-1}$ et h (voir 1.4) on définit un complexe de Kan $\widetilde{\mathcal{E}l}_h$ dont les 0-simplexes sont les chemins élémentaires d'élimination d'origine h relatifs au couple (c_1, c_2) .

Le théorème 1.3.14 et le lemme des chemins élémentaires (voir [4], chap. I, paragraphe 2.2, proposition 1) impliquent que $\mathcal{C}(h, c_1, c_2)$ et $\widetilde{\mathcal{E}l}_h$ ont même type d'homotopie faible.

* Car le complexe singulier du groupe $G_0(B)$ agit simplement transitivement dans les fibres du morphisme $\mathcal{P}_h \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}l}_h$.

1.4 Chemins élémentaires d'élimination et nappes :

1.4.1 Soient une variété W de dimension $n+1$ et $h: W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse possédant deux points critiques c_1 et c_2 , respectivement d'indice i et $i+1$, en position de s'éliminer.

Rappelons que $\mathcal{P}_h$ désigne l'espace des plongements de B dans W , adaptés à $\bar{f}_{-1}$ et h ; par définition, $\bar{\phi} \in \mathcal{P}_h$ s'il existe $\phi \in \text{Plgt}^+([-1, +1], \mathbb{R})$ tel que $h \bar{\phi} = \phi \bar{f}_{-1}$ (le modèle B et la fonction de Morse à deux points critiques $\bar{f}_{-1}$ ont été construits en 1.3) ; les points critiques de $\bar{f}_{-1}$ ont pour image par $\bar{\phi}$ les points c_1 et c_2 .

$\mathcal{P}_h$ est fibré de Kan, par l'intermédiaire de son complexe singulier, sur le complexe de Kan $\widetilde{\mathcal{E}l}_h$ des chemins élémentaires d'élimination issus de h relatifs au couple (c_1, c_2) . La fibre est le complexe singulier du groupe $G_0(B)$ défini en 1.3.3.

Si l'on choisit sur B la métrique riemannienne induite de $\mathbb{R}^{n+1}$, on peut considérer dans B le couple constitué par la nappe de gradient D de la fonction $\bar{f}_{-1}$ descendant du point critique d'indice $i+1$ jusqu'au niveau $(\bar{f}_{-1})^{-1}(0)$ et la nappe de gradient A montant du point critique d'indice i jusqu'au même niveau ; ces deux nappes se coupent transversalement et en un seul point ; on dit qu'elles sont en bonne position. De même sur W , on considère l'espace $\mathcal{N}$ formé des couples de nappes, adaptées à h , respectivement descendant de c_2 et montant de c_1 , et en bonne position. (Un espace de nappes est muni de la topologie quotient de l'espace de plongements C^∞ correspondant).

Si $\bar{\phi} \in \mathcal{P}_h$, on peut lui associer $(\bar{\phi}(D), \bar{\phi}(A)) \in \mathcal{N}$. Cette application de $\mathcal{P}_h$ dans $\mathcal{N}$ est une fibration localement triviale (conséquence de la proposition 1 de l'appendice de [4] par un raisonnement analogue à celui fait à la proposition 2 du même appendice). Le but de ce paragraphe est d'étudier la fibre $\mathcal{P}_0$ de cette fibration. On voit que le groupe $[0(i) \times 0(n-i)]^+$ agit sur $\mathcal{P}_0$; si on choisit un point-base $\bar{\phi}_0$ on définit un plongement de $[0(i) \times 0(n-i)]^+$ dans $\mathcal{P}_0$. On a alors le théorème suivant :

1.4.2 Théorème : L'inclusion de $[0(i) \times 0(n-i)]^+$ dans $\mathcal{P}_0$ est une équivalence d'homotopie faible.

1.4.3 Corollaire : L'espace $\mathcal{K}$ et le complexe de Kan $\widetilde{\mathcal{E}l}_h$ ont même type d'homotopie faible.

Preuve du corollaire 1.4.3 :

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 G_0(B) & \hookrightarrow & \mathcal{P}_h & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{E}l}_h \\
 \uparrow & & & & \\
 [0(i) \times 0(n-i)]^+ & & & \parallel & \\
 \downarrow & & & & \\
 \mathcal{P}_0 & \hookrightarrow & \mathcal{P}_h & \longrightarrow & \mathcal{K}
 \end{array}$$

Le choix du plongement adapté Φ_0 détermine un chemin élémentaire d'élimination ε_0 et un couple de nappes adaptées à h , $(D_0 = \Phi_0(D), A_0 = \Phi_0(A))$. On a les isomorphismes naturels

$$\pi_k(\mathcal{K}; (D_0, A_0)) \cong \pi_k(\mathcal{P}_h, \mathcal{P}_0; \Phi_0) \cong \pi_k(\mathcal{P}_h, G_0(B); \Phi_0) \cong \pi_k(\widetilde{\mathcal{E}l}_h; \varepsilon_0) \quad ,$$

le deuxième isomorphisme étant une conséquence de 1.4.2 et de 1.3.3 propriété (3)).

Démonstration du théorème 1.4.2 :

Introduisons un espace auxiliaire : $\widetilde{\mathcal{K}}$ est l'image de $\mathcal{P}_h$ par l'application de restriction dans l'espace des plongements de (D, A) dans W , adaptés à $\bar{f}_{-1}$ et h . (C'est une réunion de composantes connexes et l'application $\mathcal{P}_h \rightarrow \widetilde{\mathcal{K}}$ est une fibration localement triviale (même argument que pour $\mathcal{P}_h \rightarrow \mathcal{K}$)). L'application naturelle $\widetilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{K}$ est une fibration localement triviale dont la fibre $\widetilde{\mathcal{K}}_0$ a le type d'homotopie de $[0(i) \times 0(n-i)]^+$.

En effet, on vérifie facilement que l'espace des difféomorphismes de D^{i+1} (resp. D^{n-i+1}), adaptés à la fonction "carré de la distance à l'origine", et laissant fixe un point du bord, a le type d'homotopie de son espace de 1-jets en ce point, c'est-à-dire $O(i)$ (resp. $O(n-i)$).

1.4.4 Lemme : L'application naturelle $\mathcal{P}_h \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}$ est une fibration localement triviale de fibre acylique.

Admettant ce lemme, finissons la démonstration du théorème 1.4.2. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{P}_0 & \hookrightarrow & \mathcal{P}_h & \longrightarrow & \mathcal{K} \\
 & \nearrow & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 [O(1) \times O(n-1)]^+ & & \tilde{\mathcal{K}}_0 & \hookrightarrow & \tilde{\mathcal{K}} & \longrightarrow & \mathcal{K} \\
 & \searrow & & & & &
 \end{array}$$

Par le lemme 1.4.4 et le lemme des cinq, $\mathcal{P}_0 \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}_0$ est une équivalence d'homotopie faible, d'où le théorème.

Preuve du lemme 1.4.4 :

La fibre $\mathfrak{F}$ de la fibration $\mathcal{P}_h \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}$ est l'espace des plongements adaptés Φ tels que $\Phi|_{A \cup D} = \Phi_0|_{A \cup D}$. Si $\Phi \in \mathfrak{F}$, le 1-jet de Φ au point $A \cap D$ est déterminé. Puisque $A \cup D$ se rétracte par déformation sur $A \cap D$, il découle de là que $\mathfrak{F}$ a le type d'homotopie de son sous-espace $\mathfrak{F}_J$ formé des plongements adaptés Φ dont le 1-jet coïncide avec le 1-jet de Φ_0 le long des sous-variétés A et D .

En utilisant des rétractions adaptées du modèle de Morse, à image dans un voisinage arbitraire de l'une ou l'autre nappe, on montre que $\mathfrak{F}_J$ a le type d'homotopie de son sous-espace $\mathfrak{F}'$ formé des plongements adaptés Φ qui coïncident avec Φ_0 sur un "voisinage double" de $A \cup D$, (voir [4], chapitre III, paragraphe 2-4 pour la définition d'un voisinage double). A partir de là, il existe une déformation canonique de Φ telle que Φ vienne coïncider avec Φ_0 sur un "voisinage double saturé" de $A \cup D$, lequel est

un sous-cylindre de B ; alors une nouvelle déformation de Φ conduit à $\Phi = \Phi_0$. Le lemme 1.4.4 est donc démontré, ainsi que le théorème 1.4.2 et le corollaire 1.4.3.

1.4.5 Remarque importante : Reprenons le diagramme utilisé pour démontrer le corollaire 1.4.3

$$\begin{array}{ccccc}
 & G_0(B) & \hookrightarrow & \mathcal{P}_h & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{E}}l_h \\
 & \nearrow u & & & & \\
 [0(i) \times 0(n-i)]^+ & & & \parallel & & \\
 & \searrow v & & & & \\
 & \mathcal{P}_0 & \hookrightarrow & \mathcal{P}_h & \longrightarrow & \mathcal{N}
 \end{array}$$

Soit $\{\gamma_x | x \in S^k\}$ une famille à k paramètres de chemins élémentaires d'élimination d'origine h relatifs au couple (c_1, c_2) . Soit $\{\Phi_x | x \in D^k\}$ une famille à k paramètres d'éléments de $\mathcal{P}_h$ définissant la famille $\{\gamma_x | x \in S^k\}$ (on identifie S^k avec $D^k / \partial D^k$), et soit $\{N_x | x \in D^k\}$ la famille à k paramètres de "couples de nappes en bonne position" déduite de l'application $\mathcal{P}_h \rightarrow \mathcal{N}$. Puisque l'application u est une équivalence d'homotopie faible, on peut supposer que pour $x \in \partial D^k$, $\Phi_x \in [0(i) \times 0(n-i)]^+$; la famille $\{N_x | x \in \partial D^k\}$ est alors constante.

On obtient ainsi une famille de nappes $\{N_x | x \in S^k\}$, bien définie à homotopie près, que l'on dit "associée" à la famille $\{\gamma_x | x \in S^k\}$.

On définit de même une famille de chemins élémentaires "associée" à un famille de nappes, ce qui montre la symétrie de cette relation.

Si on suppose maintenant que la famille $\{N_x | x \in S^k\}$ est homotope à 0 dans $\mathcal{N}$ on voit, l'application v étant une équivalence d'homotopie faible, que la famille $\{\gamma_x | x \in S^k\}$ est homotope à 0 dans $\tilde{\mathcal{E}}l_h$.

On résume ceci en disant que :

Une famille de chemins élémentaires d'élimination d'origine h associée à une famille triviale de "couples de nappes en bonne position" est elle-même triviale.

Cette propriété et la propriété analogue décrite dans le paragraphe 1.6.12 seront fondamentales dans les chapitres 2, 3 et 4.

1.4.6 Homotopie de l'espace des chemins d'élimination issus de h :

Nous reprenons en général les notations du paragraphe 1.1 de [12]. On se fixe une fois pour toutes un chemin élémentaire ε_o comme point-base de l'espace $\mathcal{C}(h, c_1, c_2)$ de tous les bons chemins d'origine h dans $\mathfrak{Z}(W)$ qui correspondent à l'élimination de c_1 et c_2 .

Pour une métrique riemannienne convenable $\mathfrak{M}$, un couple (D_o, A_o) de nappes, associé à ε_o , est formé de nappes de gradient. On note M une variété intermédiaire de h entre c_1 et c_2 .

Soit S_o le bord dans M de la nappe D_o qui descend de c_2 , et T_o le bord dans M de la nappe A_o montant de c_1 . On se fixe deux plongements $\varphi_o : S^i \rightarrow M$ et $\theta_o : S^{n-i} \rightarrow M$ d'images respectivement S_o et T_o .

A l'aide de la métrique $\mathfrak{M}$, on construit pour tout $k \geq 1$ un isomorphisme entre $\pi_{k-1}(\mathcal{N}; (D_o, A_o))$ et $\pi_k(\text{Plgt}(S^i, M), \text{Plgt}^o(S^i, M); \varphi_o)$ où $\text{Plgt}(S^i, M)$ désigne l'espace, muni de la topologie C^∞ , des plongements de S^i dans M , et où $\text{Plgt}^o(S^i, M)$ désigne le sous-espace des plongements φ tels que $\varphi(S^i)$ coupe T_o transversalement et en un seul point (voir [4], chapitre III, paragraphe 2-4 ; dans [12] ce dernier espace est noté $\text{Plgt}(S^i, M; S^i \pitchfork T_o = 1)$). On adoptera pour le groupe relatif ci-dessus la notation

$\pi_k^{\text{rel } T}{}^o(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_o)$ introduite dans [12]. De ce qui précède on déduit le

1.4.7 Théorème : Pour tout $k \geq 1$, il existe un isomorphisme

$$\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h, c_1, c_2); \varepsilon_o) \cong \pi_k^{\text{rel } T}{}^o(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_o) \quad .$$

1.5 Chemins élémentaires de naissance :

1.5.1 Les chemins élémentaires de naissance ont été définis en 1.3.12.

Soit k une fonction de Morse sur W ; dans la suite, on ne s'intéresse qu'à une partie de W comprise entre deux niveaux de k et sur laquelle k n'a pas de point critique. Pour simplifier les notations nous supposons que k elle-même n'a pas de point critique sur W .

Si Φ est un plongement de B dans W , adapté à $\bar{f}_1$ et k , Φ détermine un chemin élémentaire de naissance issu de k . Notons $\mathcal{P}_k$ l'espace des plongements adaptés à $\bar{f}_1$ et k , $\tilde{\mathcal{E}}l_k$ le complexe de Kan dont les 0-simplexes sont les chemins élémentaires de naissance issus de k .

Le morphisme $\mathcal{P}_k \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}l_k$ est une fibration de Kan, ayant pour fibre le complexe singulier du groupe $G_0(B)$ défini en 1.3.3. Comme en 1.3.15, on montre que l'espace $\mathcal{A}(k; i)$ des bons chemins d'origine k dans $\mathfrak{J}(W)$ correspondant à la naissance à un niveau donné de k d'un couple de points critiques d'indices $(i, i+1)$ a même type d'homotopie faible que le complexe de Kan $\tilde{\mathcal{E}}l_k$ correspondant. On en déduit immédiatement la proposition suivante :

1.5.2 Proposition : Soient Φ_0 un plongement adapté à $\bar{f}_1$ et k , et v_0 le chemin élémentaire de naissance qui lui est associé. On a la suite exacte

$$\dots \rightarrow \pi_j(G_0(B); \text{Id}) \rightarrow \pi_j(\mathcal{P}_k; \Phi_0) \rightarrow \pi_j(\mathcal{A}(k; i); v_0) \rightarrow \pi_{j-1}(G_0(B); \text{Id}) \rightarrow \dots$$

Rappelons qu'il existe un difféomorphisme de B sur $D^n \times [0, 1]$ adapté à $\bar{f}_1$ et à la fonction hauteur. Il en découle une action de $SO(n)$ sur $\mathcal{P}_k$. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_j([0(i) \times 0(n-i)]^+) & \longrightarrow & \pi_j(SO(n)) \\ \textcircled{1} \downarrow & & \downarrow \textcircled{2} \\ \pi_j(G_0(B)) & \longrightarrow & \pi_j(\mathcal{P}_k) \end{array}$$

Les deux flèches aboutissant dans $\pi_j(\mathcal{P}_k)$ dépendent du choix d'un point base $\mathfrak{g}_0 \in \mathcal{P}_k$; la commutativité du diagramme n'a lieu que si l'on choisit le même point base pour définir les deux flèches.

La flèche (1) est un isomorphisme d'après la propriété (3) de 1.3.3. D'autre part, il est facile de trouver le type d'homotopie de $\mathcal{P}_k$: désignons par V une variété de niveau de la fonction k (elles sont toutes difféomorphes) ; notons $V_n(\tau V)$ la variété des n -repères tangents à V ; alors $\mathcal{P}_k$ a le type d'homotopie de $V_n(\tau V)$. Par exemple, si $V = S^n$, $V_n(\tau V) \cong SO(n+1)$; alors pour $j < n$, (2) est un épimorphisme, et pour $j < n-1$, (2) est un isomorphisme. Nous pouvons donc énoncer :

1.5.3 Proposition : Soit $W = S^n \times [0,1]$ et $k : W \rightarrow [0,1]$ la projection sur $[0,1]$; si $j < n$ et $j < \sup(i, n-i)$, alors $\pi_j(G_o(B)) \rightarrow \pi_j(\mathcal{P}_k)$ est un épimorphisme.

1.5.4 Corollaire : Dans les conditions de la proposition 1.5.3

$\pi_1(\mathcal{A}(k;i); \nu_o) \cong \pi_o(G_o(B)) \cong \mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}$. Donc il n'y a pas unicité des naissances à 1 paramètre ; il y a une classe de cônes de naissance non triviaux.

1.5.5 Corollaire : Si $k : S^n \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ est la projection, si $1 < j < n$, et $j < \inf(i, n-i)$, on a $\pi_j(\mathcal{A}(k;i); \nu_o) \cong \pi_{j-1}(S0)$.

Preuve : On est dans le domaine stable et la suite exacte de 1.5.2 donne une identification de $\pi_j(\mathcal{A}(k;i); \nu_o)$ avec le noyau de l'addition : $\pi_{j-1}(S0) \times \pi_{j-1}(S0) \rightarrow \pi_{j-1}(S0)$.

1.6 Familles élémentaires à 2 paramètres de traversée de la strate $\mathfrak{F}_\alpha^2$:

1.6.1 Rappelons qu'on a noté $\mathfrak{F}_\alpha^2(W)$ (resp. $\mathfrak{F}_\alpha^2$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) la strate de codimension 2 de $\mathfrak{F}(W)$ formée des fonctions f ayant toutes leurs valeurs critiques distinctes et tous leurs points critiques non dégénérés sauf un, le point critique exceptionnel étant de codimension 2 : au voisinage d'un tel point, on peut choisir un système de coordonnées sur W pour lequel f s'écrit (voir [4])

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = q(x_1, \dots, x_n) - x_{n+1}^4/4 ,$$

où q est une forme quadratique de n variables, non dégénérée et d'indice i .

D'après [23], la stratification de $\mathfrak{F}(W)$ est localement triviale au voisinage de $\mathfrak{F}_\alpha^2(W)$; le modèle transverse est une boule ouverte de dimension 2 stratifiée comme sur la figure 8

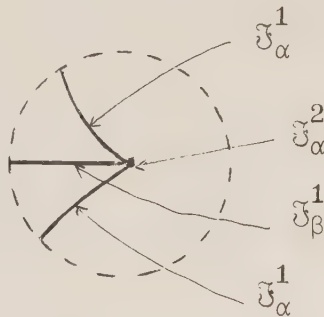


Figure 8

De plus, au voisinage d'un de ses points f , $\mathfrak{F}_\alpha^2(W)$ coïncide avec l'orbite de f sous l'action du groupe $\text{Diff } W \times \text{Diff } I$, et l'application

$$\text{Diff } W \times \text{Diff } I \rightarrow \mathfrak{F}_\alpha^2(W)$$

définie par $(\Phi, \varphi) \mapsto \varphi \circ f \circ \Phi^{-1}$ est une fibration localement triviale sur l'orbite de f (propriété (a_2) du paragraphe 1.2).

1.6.2 La famille standard à 2 paramètres de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2(\mathbb{R}^{n+1})$:

Soit i un entier, $0 \leq i \leq n$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

On définit une application $f_{\lambda, \mu} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule

$$f_{\lambda, \mu}(x) = q(x_1, \dots, x_n) - \frac{x_{n+1}^4}{4} - \left(\lambda \frac{x_{n+1}^2}{2} + \mu x_{n+1} \right),$$

où $q(x_1, \dots, x_n) = -x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2$. En particulier, $f_{0,0} = f$.

Si $4\lambda^3 + 27\mu^2 > 0$ (resp. $4\lambda^3 + 27\mu^2 < 0$) la fonction $f_{\lambda, \mu}$ a un point critique non dégénéré, d'indice $i+1$ (resp. trois points critiques non dégénérés,

d'indices $i+1, i+1$) ; de plus, si $\mu = 0$, $\lambda < 0$, les deux points critiques d'indice $i+1$ sont au même niveau (c'est-à-dire $f_{\lambda, \mu} \in \mathfrak{F}_\beta^1(\mathbb{R}^{n+1})$).

Tous les points critiques de $f_{\lambda, \mu}$ sont situés sur le dernier axe de coordonnées ($x_1 = \dots = x_n = 0$).

Si $4\lambda^3 + 27\mu^2 = 0$ et si $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, $f_{\lambda, \mu}$ a un point critique non dégénéré d'indice $i+1$ et un point critique de naissance $(i, i+1)$ (c'est-à-dire $f_{\lambda, \mu} \in \mathfrak{F}_\alpha^1(\mathbb{R}^{n+1})$) ; enfin, si $\lambda = \mu = 0$, $f_{\lambda, \mu} \in \mathfrak{F}_\alpha^2(\mathbb{R}^{n+1})$.

Il est important de remarquer que, si $4\lambda^3 + 27\mu^2 < 0$, les nappes de gradient (pour la métrique usuelle de $\mathbb{R}^{n+1}$) descendant des deux points critiques d'indice $i+1$ jusqu'au niveau $f_{\lambda, \mu} = 0$ sont contenues dans le sous-espace vectoriel $x_{i+1} = \dots = x_n = 0$, alors que la nappe de gradient montant du point critique d'indice i jusqu'au niveau $f_{\lambda, \mu} = 0$ est contenue dans le sous-espace vectoriel $x_1 = \dots = x_i = 0$. Dans la variété intermédiaire $f_{\lambda, \mu} = 0$, chaque nappe descendant d'un point critique d'indice $i+1$ rencontre donc transversalement et en un seul point la nappe montant du point critique d'indice i ; de plus, les deux nappes descendant des points critiques d'indice $i+1$ sont disjointes. Dans ces conditions, on dit que ces nappes forment un "triple de nappes en bonne position" adapté à la fonction $f_{\lambda, \mu}$.

Comme dans le paragraphe 1.3, la nécessité de passer de $\mathbb{R}^{n+1}$ à une variété W nous oblige à décrire une famille de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2(\mathbb{R}^{n+1})$ dont le support soit compact.

1.6.3 Un modèle à support compact :

Comme en 1.3, on note

$$r_1^2 = x_1^2 + \dots + x_i^2, \quad r_2^2 = x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Alors que pour les chemins d'élimination, le modèle choisi avait pour support une variété à bord anguleux difféomorphe à $D^n \times I$, il est naturel dans le cas présent de choisir un modèle dont le support soit une variété à bord anguleux difféomorphe au voisinage de Morse standard d'un point

critique d'indice $i+1$.

On définit, pour $a, b > 0$, le sous-espace $B_{a,b} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ par

$$B_{a,b} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -a \leq f \leq a, (r_1^2 + x_{n+1}^2)r_2^2 \leq b\}.$$

Pour tout couple (a, b) de réels positifs, $B_{a,b}$ est une variété compacte à bord anguleux ; on vérifie en effet que, si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, les sous-variétés $f = a$ et $(r_1^2 + x_{n+1}^2)r_2^2 = b$ se coupent transversalement. On choisira comme support du modèle la variété $B_{1,1}$ que l'on notera simplement B .

Remarquons que le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}^{n+1}$ conservant les fonctions r_1^2 , r_2^2 et x_{n+1} est un groupe de symétrie de B ; en particulier, $[0(i) \times 0(n-i)]^+$ agissant sur les n premières variables est un groupe de symétrie de B .

On reprend les fonctions ω et α du paragraphe 1.3.2 en remplaçant simplement dans la définition de α le domaine de définition par $[0, 1]$ (au lieu de $[0, 2]$), et on pose

$$\bar{f}_{\lambda, \mu}(x) = -r_1^2 + r_2^2 - \frac{x_{n+1}^4}{4} - \varepsilon \theta(x)(\lambda x_{n+1}^2 + \mu x_{n+1}),$$

où $\varepsilon > 0$ sera choisi plus tard suffisamment petit, et où $\theta(x) = \alpha[(r_1^2 + x_{n+1}^2)r_2^2] \omega(f)$.

1.6.4 Propriétés de la famille $\bar{f}_{\lambda, \mu}$:

Dorénavant, on se limitera à $|\lambda| \leq A$, $|\mu| \leq A$. On retrouve des propriétés exactement analogues à celles énoncées dans le paragraphe 1.3.3.

(1) Le support de la déformation est exactement B (ceci dès que (λ, μ) parcourt un petit voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$).

(2) Si ε est assez petit, les points critiques de $\bar{f}_{\lambda, \mu}$ ne peuvent se trouver que sur le dernier axe ($x_1 = \dots = x_n = 0$). De plus, les points

critiques de $\bar{f}_{\lambda, \mu}$ coïncident, si ε est assez petit, avec ceux de $f_{\varepsilon\lambda, \varepsilon\mu}$.

(3) Soit Φ un difféomorphisme de B laissant $\bar{f}_{\lambda, \mu}$ invariante pour tous les couples (λ, μ) appartenant à un petit voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$; alors Φ laisse invariantes séparément les fonctions f , $\theta(x)x_{n+1}^2$, et $\theta(x)x_{n+1}$; on en déduit que Φ laisse invariantes f , x_{n+1} , et $\alpha[(r_1^2 + x_{n+1}^2)r_2^2]$, et enfin que Φ appartient au groupe $G_o(B)$ des difféomorphismes de B laissant invariantes les fonctions r_1^2 , r_2^2 , et x_{n+1} (notations analogues à celles du paragraphe 1.3).

On montre comme en 1.3.3 que cet espace se rétracte par déformation sur son espace de jets à l'origine, qui n'est autre que $[0(i) \times 0(n-i)]^+$ (tous les difféomorphismes que l'on considère conservent l'orientation).

(4) Si ε est assez petit, $\bar{f}_{\lambda, \mu}(B) = [-1, +1]$ dès que $|\lambda| \leq A$, $|\mu| \leq A$.

(5) Si (Φ, φ) est un couple d'un difféomorphisme de B et d'un difféomorphisme de $[-1, +1]$ tels que, pour tous (λ, μ) appartenant à un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$, on ait $\bar{f}_{\lambda, \mu} \Phi = \varphi \bar{f}_{\lambda, \mu}$, alors $\varphi = \text{identité}$, et $\Phi \in G_o(B)$. La démonstration est simplifiée par rapport à celle du paragraphe 1.3.3, car $\bar{f}_{\lambda, \mu}$ est linéaire en λ et μ .

(6) Pour tout couple (a, b) de réels positifs, $B_{a, b}$ est difféomorphe au voisinage de Morse d'un point critique d'indice $i+1$.

(7) Choix du domaine de variations de (λ, μ) :

On fait varier $(\varepsilon\lambda, \varepsilon\mu)$ dans le domaine Δ représenté sur la figure 9. Les segments d_+ et d_- sont respectivement portés par les droites d'équations

$$d_+ : \varepsilon\mu = \eta(\varepsilon\lambda) + \eta^3$$

$$d_- : \varepsilon\mu = -\eta(\varepsilon\lambda) - \eta^3, \text{ où } \eta \text{ est une constante } > 0.$$

Le segment vertical a une abscisse strictement positive $\varepsilon\lambda_0^2$.

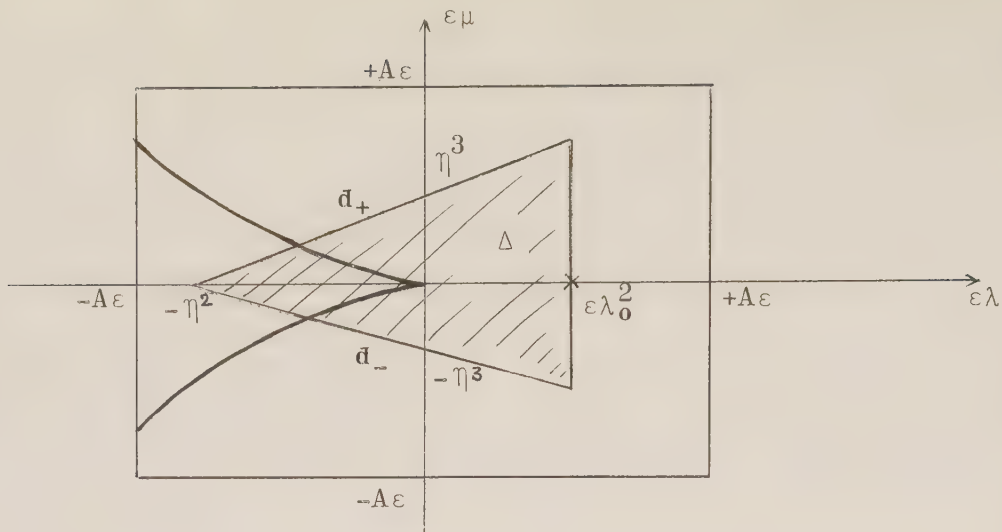


Figure 9

Si $(\varepsilon\lambda, \varepsilon\mu) \in \mathbf{d}_-$, les points critiques de $f_{\varepsilon\lambda, \varepsilon\mu}$ ont pour coordonnées $x_1 = \dots = x_n = 0$, $x_{n+1} = \alpha, \beta$, ou η , avec $\alpha + \beta = -\eta$, $\alpha\beta = \eta^2 + \varepsilon\lambda$; en particulier, un des points critiques d'indice $i+1$ est fixe, et les deux autres varient sur le dernier axe, symétriquement par rapport à la valeur $-\eta/2$; pour $\varepsilon\lambda = -3\eta^2/4$, ces derniers viennent se confondre en un point de naissance de coordonnées $x_1 = \dots = x_n = 0$, $x_{n+1} = \eta/2$. La situation sur $\mathbf{d}_+$ s'obtient en échangeant les deux points critiques d'indice $i+1$.

1.6.5 Plongements adaptés à la fonction singulière :

On utilise des notations analogues à celles du paragraphe 1.3.8 :

$G(B_{a,b})$ est l'espace des difféomorphismes de $B_{a,b}$ qui laissent invariante la fonction $f = -r_1^2 + r_2^2 - x_{n+1}^4/4$.

$G_o(B_{a,b})$ est l'espace des difféomorphismes de $B_{a,b}$ qui laissent invariantes les fonctions r_1^2, r_2^2, x_{n+1} .

$\mathcal{P}(B_{a,b})$ est l'espace des plongements adaptés à f de $B_{a,b}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$; par définition, $\Phi \in \mathcal{P}(B_{a,b})$ s'il existe un plongement croissant $\varphi : [-a, +a] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f\Phi = \varphi f$; un tel φ s'il existe est unique.

$\mathcal{P}_0(B_{a,b}) \subset \mathcal{P}(B_{a,b})$ est défini par la condition : $\bar{\varphi} \in \mathcal{P}_0(B_{a,b})$ si $f \bar{\varphi} = f$.

Tous ces espaces sont munis de la topologie C^∞ .

Enfin, soit $G = G(f)$ le complexe semi-simplicial (défini dans le paragraphe 1.1) dont les 0-simplexes sont les germes à l'origine de difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^{n+1}$ conservant f . On a un morphisme naturel de restriction $\rho_{a,b} : \mathcal{P}_0(B_{a,b}) \rightarrow G$ (comme dans les paragraphes précédents, cette notation signifie en fait un morphisme dans G du complexe singulier différentiable de $\mathcal{P}_0(B_{a,b})$).

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 G_0(B) & \hookrightarrow & \mathcal{P}_0(B) & \xrightarrow{\rho} & G \\
 \uparrow & & & & \downarrow \text{"1-jet en 0"} \\
 [0(i) \times 0(n-i)]^+ & \hookrightarrow & & \longrightarrow & [0(i, n-i) \times \mathbb{Z}_2]^+ \\
 & \searrow & & & \uparrow \\
 & & & & 0(i) \times 0(n-i)
 \end{array}$$

Par une démonstration analogue à celle de la proposition 1.3.9, mais facilitée (en ce qui concerne les rétractions adaptées) par le fait que les sous-variétés $f = \pm a$ et $(r_1^2 + x_{n+1}^2)r_2^2$ sont toujours transverses, on montre que le morphisme $\rho : \mathcal{P}_0(B) \rightarrow G$ est une fibration de Kan de fibre acyclique, d'où on déduit (à l'aide du théorème 1.1.17 ou du paragraphe 1.1.18) que le quotient $\mathcal{P}_0(B)/G_0(B)$ a deux composantes connexes acycliques (la différence avec le paragraphe 1.3 est que $\mathcal{P}_0(B)$ contient la symétrie $x_{n+1} \mapsto -x_{n+1}$).

De même, la démonstration de la proposition 1.3.11 est valable dans le cas, où $f = -r_1^2 + r_2^2 - x_{n+1}^4/4$. On en déduit que la projection naturelle $\mathcal{P}(B) \rightarrow \text{Plgt}^+([-1, +1], \mathbb{R})$ est une fibration de Kan de base acyclique et de fibre $\mathcal{P}_0(B)$, et donc que le quotient $\mathcal{P}(B)/G_0(B)$ a deux composantes

connexes acycliques.

1.6.6 Familles élémentaires de traversée de la strate $\mathfrak{F}_\alpha^2$:

Comme dans le paragraphe 1.3.12, si $F \in \mathfrak{F}_\alpha^2(W)$, on appelle plongement adapté à f et F un plongement $\Phi: B \rightarrow W$ tel qu'il existe un plongement croissant $\varphi: [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $F\Phi = \varphi f$; un tel φ , s'il existe, est unique.

On note $\mathcal{P}_F$ l'espace, muni de la topologie C^∞ , des plongements de B dans W adaptés à f et F . Les espaces $\mathcal{P}_F$ et $\mathcal{P}(B)$ ont le même type d'homotopie.

Si $(\varepsilon\lambda, \varepsilon\mu) \in \Delta$ (notations du 1.6.4, (7)) on définit $F_{\lambda, \mu}: W \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} F_{\lambda, \mu}(x) = F(x) & \text{si } x \notin \Phi(B) . \\ F_{\lambda, \mu}(x) = \varphi \bar{f}_{\lambda, \mu} \Phi^{-1}(x) & \text{si } x \in \Phi(B) . \end{cases}$$

Une telle famille à 2 paramètres s'appelle famille élémentaire à 2 paramètres de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2(W)$ au point F . Si on munit l'ensemble $\mathcal{El}_F$ de ces familles élémentaires de la topologie C^0 , on a une application continue $\mathcal{P}_F \rightarrow \mathcal{El}_F$.

Soit $\tilde{\mathcal{El}}_F$ le sous-complexe du complexe singulier de l'espace $\mathcal{El}_F$, image par cette application du complexe singulier de l'espace $\mathcal{P}_F$.

Il est immédiat, à partir de la propriété (5) du paragraphe 1.6.4, que deux plongements adaptés (Φ_1, φ_1) et (Φ_2, φ_2) ont même image dans $\mathcal{El}_F$ si et seulement si

$$1) \quad \varphi_1 = \varphi_2$$

$$2) \quad \text{il existe } \Psi \in G_0(B) \text{ tel que } \Phi_2 = \Phi_1 \Psi .$$

Le complexe singulier du groupe $G_o(B)$ agit donc simplement transitivement dans les fibres du morphisme $\mathcal{P}_F \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}l}_F$, ce qui montre que $\widetilde{\mathcal{E}l}_F$ est un complexe de Kan, et que ce morphisme est une fibration de Kan.

Des résultats du paragraphe 1.6.5, on déduit le

1.6.7 Théorème : Le complexe de Kan $\widetilde{\mathcal{E}l}_F$ des familles élémentaires à 2 paramètres de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2(W)$ au point F a deux composantes connexes, chacune acyclique.

Appelons $\mathcal{C}_F$ l'espace de toutes les familles à 2 paramètres de type Δ de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2(W)$ en F (cet espace a été défini dans le paragraphe 1.2.1). On vérifie facilement, à l'aide du théorème 1.6.7, que le morphisme $\widetilde{\mathcal{E}l}_F \rightarrow \mathcal{C}_F$ induit par l'inclusion est une équivalence d'homotopie faible.

On peut alors appliquer le lemme des familles élémentaires (proposition 1.2.2) sous la forme indiquée à la suite de la démonstration de la proposition 1.2.2 (voir figures 1 et 2), ce qui permet dans chaque cas de remplacer (homotopiquement) l'espace de toutes les familles de traversée* de $\mathfrak{F}_\alpha^2(W)$ d'origine fixée h (dans $\mathfrak{F}^0(W)$ ou $\mathfrak{F}_\beta^1(W)$) par le complexe de Kan $\widetilde{\mathcal{E}l}_h$ des familles élémentaires de même origine (la définition de $\widetilde{\mathcal{E}l}_h$ est évidente à partir de celle de $\widetilde{\mathcal{E}l}_F$; comparer au paragraphe 1.3.15 et voir paragraphe 1.6.8).

Remarque : L'étude qui précède n'est pas nécessaire si on veut simplement montrer que toute famille de traversée d'origine h est homotope à une famille élémentaire (par ex. pour le théorème 3.2.1) ; il suffit en effet de savoir qu'il passe une famille élémentaire par chaque point $F \in \mathfrak{F}_\alpha^2(W)$, ce qui est une conséquence immédiate du modèle local d'un point critique de codimension 2.

* Lire ici la remarque 1.2.3.

1.6.8 Familles élémentaires et nappes :

Ce paragraphe est à comparer au paragraphe 1.4.

Soit $h: W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse et soient d_0, d_1, a , trois points critiques de h , respectivement d'indice $i+1, i+1, i$; on suppose que d_0 et d_1 sont au même niveau, et que les couples (d_0, a) et (d_1, a) sont en position de s'éliminer.

On désigne par $\mathcal{P}_h$ l'espace, muni de la topologie C^∞ , des plongements de B dans W adaptés à $\bar{f}_{-\eta^2/\varepsilon, c}$ et h ; par définition $\phi \in \mathcal{P}_h$ s'il existe

$\varphi \in \text{Plgt}^+([-1, +1], \mathbb{R})$ tel que $h\phi = \varphi \bar{f}_{-\eta^2/\varepsilon, c}$ (le modèle B et les fonctions

$\bar{f}_{\lambda, \mu}$ ont été définis en 1.6.3), et si de plus les trois points critiques de $\bar{f}_{-\eta^2/\varepsilon, c}$ ont pour image par ϕ les points d_0, d_1, a .

$\mathcal{P}_h$ est fibré de Kan, par l'intermédiaire de son complexe singulier, sur le complexe de Kan $\widetilde{\mathcal{E}l}_h$ des familles élémentaires de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2(W)$ d'origine h relatives au triple (d_0, d_1, a) . La fibre est le complexe singulier du groupe $G_0(B)$ défini en 1.6.5.

On munit B de la métrique riemannienne induite par la métrique standard sur $\mathbb{R}^{n+1}$, et on note D_0, D_1 (resp. A) les nappes de gradient de la fonction $\bar{f}_{-\eta^2/\varepsilon, c}$ descendant (resp. montant) des points critiques d'indice $i+1$ (resp. du point critique d'indice i) jusqu'au niveau $(\bar{f}_{-\eta^2/\varepsilon, c})^{-1}(0)$.

On a vu au paragraphe 1.6.2 que $D_0 \cap D_1 = \emptyset$, et que les couples (D_0, A) et (D_1, A) sont en bonne position.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace formé des triples^{*} de nappes, adaptées à h , descendant de d_0 et d_1 , et montant de a , qui sont en bonne position (c'est-à-dire limitées à une même variété de niveau de h et vérifiant les mêmes

* Dans un triple en bonne position, les deux nappes descendant des points critiques d'indice $i+1$ sont données dans un certain ordre.

conditions que le triple standard (D_0, D_1, A) . (Un espace de nappes est muni de la topologie quotient de l'espace de plongements C^∞ correspondant).

Si $\Phi \in \mathcal{P}_h$, on lui associe le triple $(\Phi(D_0), \Phi(D_1), \Phi(A))$, ce qui définit une application continue de $\mathcal{P}_h$ dans $\mathcal{C}$.

On montre dans le chapitre 2 la surjectivité de cette application, ce qui est l'analogue pour la singularité $\mathfrak{I}_\alpha^2$ du "cancellation lemma" de Smale (qui est relatif à $\mathfrak{I}_\alpha^1$).

Comme en 1.4.1, l'application $\mathcal{P}_h \rightarrow \mathcal{C}$ est une fibration localement triviale, dont nous allons étudier la fibre $\mathcal{P}_0$.

Le groupe $[O(i) \times O(n-i)]^+$ agit sur $\mathcal{P}_0$; si on choisit un point-base $\Phi_0 \in \mathcal{P}_0$, on définit un plongement de $[O(i) \times O(n-i)]^+$ dans $\mathcal{P}_0$.

1.6.9 Théorème : L'inclusion de $[O(i) \times O(n-i)]^+$ dans $\mathcal{P}_0$ est une équivalence d'homotopie faible.

Par une démonstration formellement analogue à celle du corollaire 1.4.3, on en déduit

1.6.10 Corollaire : L'espace $\mathcal{C}$ et le complexe de Kan $\tilde{\mathcal{E}}_h$ ont même type d'homotopie faible.

1.6.11 Démonstration du théorème 1.6.9 (esquisse) :

Soit $\tilde{\mathcal{C}}$ l'image de $\mathcal{P}_h$ dans l'espace des plongements de (D_0, D_1, A) dans W adaptés à $\bar{f}_{-\eta^2/\varepsilon_0}$ et h (c'est une réunion de composantes connexes et $\mathcal{P}_h \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ est une fibration localement triviale). L'application naturelle $\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ est une fibration localement triviale dont la fibre $\tilde{\mathcal{C}}_0$ a le type d'homotopie du sous-groupe $[O(i) \times O(i) \times O(n-i)]^{++}$ de $O(i) \times O(i) \times O(n-i)$ formé des triples (x, y, z) vérifiant $\det x \det y > 0$ et $\det x \det z > 0$.

On étudie alors le diagramme ci-dessous, dans lequel $\tilde{\mathcal{P}}_0$ est la fibre de la fibration $\mathcal{P}_h \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{\mathcal{P}}_0 & = & \tilde{\mathcal{P}}_0 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathcal{P}_0 & \rightarrow & \mathcal{P}_h & \rightarrow & \mathcal{C} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 \tilde{\mathcal{C}}_0 & \rightarrow & \tilde{\mathcal{C}} & \rightarrow & \mathcal{C}
 \end{array}$$

On remarque que l'application "1-jet le long de la portion du dernier axe comprise entre les points $D_0 \cap A$ et $D_1 \cap A$ " détermine une fibration de $\tilde{\mathcal{P}}_0$ sur l'espace des lacets^{*} de $SO(i)$, dont la fibre est acyclique : pour le voir, on reprend la démonstration utilisée en 1.4.4, et on s'aperçoit que la fibre cherchée a même type d'homotopie que l'espace des plongements adaptés dont le 1-jet est fixé sur $D_0 \cup D_1 \cup A$; on conclut à l'acyclicité de ce dernier espace en utilisant un voisinage triple saturé dont la description est faite au chapitre 2.

On déduit le théorème 1.6.9 de ce qui précède en remarquant que le type d'homotopie de $\mathcal{P}_0$ est la seule inconnue dans la fibration $\mathcal{P}_0 \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_0$ de fibre $\tilde{\mathcal{P}}_0$, et que le diagramme suivant est commutatif pour $k \geq 1$:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 \rightarrow \pi_k([0(i) \times 0(n-i)]^+) & \xrightarrow{\alpha_*} & \pi_k([0(i) \times 0(i) \times 0(n-i)]^{++}) & \xrightarrow{\beta_*} & \pi_k(SO(i)) \rightarrow 0 \\
 \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \uparrow \\
 \pi_k(\mathcal{P}_0) & \longrightarrow & \pi_k(\tilde{\mathcal{C}}_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{k-1}(\tilde{\mathcal{P}}_0)
 \end{array}$$

avec $\alpha(x,y) = (x,x,y)$ et $\beta(x,y,z) = xy^{-1}$.

* On avait déjà remarqué dans le paragraphe 1.4 que le 1-jet en $A \cap D_1$ et $A \cap D_2$ d'un élément de $\tilde{\mathcal{P}}_0$ est déterminé ; ces deux jets sont les mêmes pour la fibre au-dessus du triple standard.

1.6.12 Comme en 1.4.5, on peut énoncer :

Une famille de "familles élémentaires" de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2(W)$ d'origine h associée à une famille triviale de "triples de nappes en bonne position" est elle-même triviale.

1.6.13 Familles élémentaires modifiées de traversée de la strate $\mathfrak{F}_\alpha^2$:

On a besoin, dans les chapitres 2 et 3, d'une famille standard de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2(\mathbb{R}^{n+1})$ d'origine $\bar{f}_{-\eta^1/\varepsilon_0}$ dans laquelle le chemin $\bar{f}_{\lambda,\mu}|_{d_+}$ (resp. $\bar{f}_{\lambda,\mu}|_{d_-}$) est remplacé par un chemin d'origine $\bar{f}_{-\eta^2/\varepsilon_0}$ composé d'un demi-chemin élémentaire de croisement γ_+ (resp. γ_-) suivi d'un chemin élémentaire d'élimination ε_+ (resp. ε_-). (Pour la définition de d_+ et d_- , voir 1.6.4, (7)). On passe de la famille standard $\{\bar{f}_{\lambda,\mu}, (\lambda,\mu) \in \Delta\}$ à une famille standard modifiée, de la manière suivante, décrite sur la figure 10

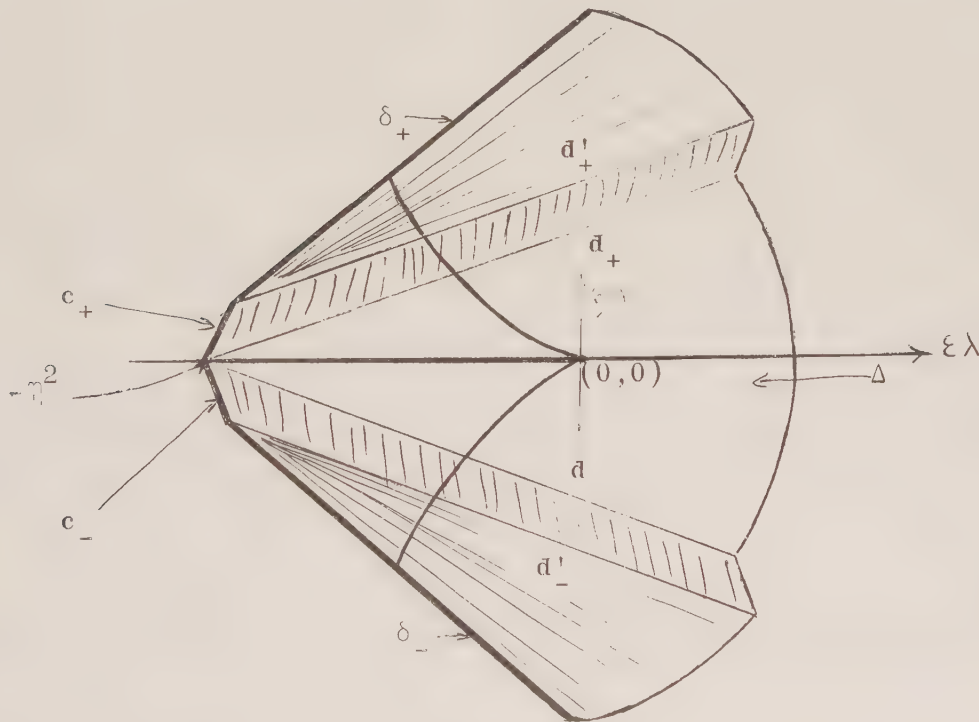


Figure 10 (comparer à la figure 9).

Les chemins γ_+ et γ_- sont des demi-chemins élémentaires de croisement issus de $\bar{f}_{-\eta^2/\varepsilon,0}$: le chemin γ_+ (resp. γ_-) ne modifie la fonction $\bar{f}_{-\eta^2/\varepsilon,0}$ qu'au voisinage du point critique d'indice $i+1$ qui n'est pas concerné par le chemin d'élimination $\bar{f}_{\lambda,\mu}|_{d_+}$ (resp. $\bar{f}_{\lambda,\mu}|_{d_-}$) et correspond à un léger accroissement des valeurs. On peut construire γ_+ et γ_- de façon que toutes les fonctions de γ_+ et γ_- soient laissées invariantes par tout élément du groupe $G_0(B)$ qui a été défini en 1.6.5 ; ceci est possible car les points critiques de $\bar{f}_{-\eta^2/\varepsilon,0}$ sont sur l'axe $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Puisque sur $\bar{f}_{\lambda,\mu}|_{d_+}$ (resp. $\bar{f}_{\lambda,\mu}|_{d_-}$) le point critique d'indice $i+1$ dont la valeur varie sur γ_+ (resp. γ_-) est fixe (voir 1.6.4 propriété (7)) on peut facilement transporter γ_+ (resp. γ_-) le long de d_+ (resp. d_-) et définir ainsi une famille à deux paramètres de fonctions invariantes par tout élément de $G_0(B)$. On obtient ainsi un nouveau domaine de paramètres Δ' limité latéralement par $c_+ \cup d'_+$ et $c_- \cup d'_-$ (voir figure 10) et une famille de fonctions $\{\bar{f}'_{\lambda,\mu}, (\varepsilon\lambda, \varepsilon\mu) \in \Delta'\}$ telle que :

$$1) \quad \text{si } (\varepsilon\lambda, \varepsilon\mu) \in \Delta, \quad \bar{f}'_{\lambda,\mu} = \bar{f}_{\lambda,\mu}$$

$$2) \quad \bar{f}'_{\lambda,\mu}|_{c_{\pm}} = \gamma_{\pm}.$$

On choisit alors une homotopie, constante sur l'extrémité g_+ de γ_+ (resp. sur l'extrémité g_- de γ_-) entre $\bar{f}'_{\lambda,\mu}|_{d'_+}$ (resp. $\bar{f}'_{\lambda,\mu}|_{d'_-}$) et un chemin élémentaire d'élimination ε_+ (resp. ε_-).

Puisque les points critiques de $\bar{f}_{\lambda,\mu}, (\varepsilon\lambda, \varepsilon\mu) \in d'_+$ (resp. d'_-) sont sur l'axe $x_1 = \dots = x_n = 0$, on peut exiger de notre construction les propriétés suivantes :

1) ε_+ (resp. ε_-) est associé à un couple en bonne position de nappes de gradient de $\bar{f}_{-\eta^2/\varepsilon,0}$.

2) Toutes les fonctions de la famille à 2 paramètres ainsi obtenue (voir figure 10 où $\delta_{\pm}$ correspond à $\varepsilon_{\pm}$) sont laissées invariantes par les éléments de $G_0(B)$.

Pour cela, on remarque qu'il existe un chemin élémentaire ε_+ ayant cette propriété. On reparamètre alors au besoin le chemin $\bar{f}'_{\lambda,\mu}|d'_+$ pour que les fonctions des chemins ε_+ et $\bar{f}'_{\lambda,\mu}|d'_+$ correspondant à une même valeur du paramètre aient les mêmes points critiques. L'homotopie $\lambda \varepsilon_+ + (1-\lambda) \bar{f}'_{\lambda,\mu}|d'_+$ a alors les propriétés voulues (on raisonne de même pour ε_-).

En définitive, on a une famille à 2 paramètres de fonctions définies sur B qui a les propriétés voulues et qui de plus est formée de fonctions invariantes par les éléments de $G_0(B)$. On en déduit immédiatement que les complexes de Kan de familles élémentaires de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2(W)$ construits à partir de la famille standard $\bar{f}_{\lambda,\mu}, (\lambda, \mu) \in \Delta$ ou à partir de la famille standard modifiée que l'on vient de définir, sont naturellement isomorphes ; tout le paragraphe 1.6 est donc valable en remplaçant partout "famille élémentaire" par "famille élémentaire modifiée".

Dans les chapitres 2 et 3, lorsque nous parlerons de famille élémentaire de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2(W)$, il s'agira en général de famille élémentaire modifiée ; le seul point où nous n'avons pas besoin d'utiliser des familles élémentaires modifiées est la démonstration du lemme d'unicité de l'apparition des queues d'aronde (théorème 3.3.1) et de son équivalent à plusieurs paramètres (voir paragraphe 3.5.2).

1.6.14 Remarque : Une des raisons qui rendent utile la notion de famille élémentaire modifiée est la propriété suivante : si une famille élémentaire modifiée est "associée" à un triple de nappes (D_0, D_1, A) , les chemins élémentaires d'élimination qui la bordent sont respectivement "associés" aux couples de nappes (D_0, A) et (D_1, A) .



CHAPITRE 2

LE LEMME DE LA QUEUE D'ARONDE ET SES CONSEQUENCES♦

2.0 Dans [4] Cerf démontre le "lemme de la queue d'aronde" dans le cas d'une variété intermédiaire simplement connexe à partir du "lemme d'unicité des morts". Nous suivons ici la démarche inverse en montrant qu'indépendamment du lemme d'unicité des morts, et donc sans hypothèse de simple connexité, un chemin de fonctions dont le graphique ne comporte comme accident qu'une queue d'aronde est toujours homotope rel. le bord à un chemin ne traversant aucune strate de codimension 1 (théorème 2.1.1).

On en déduit immédiatement le "lemme de translation des indices" de [12] sans avoir à calculer $\pi_0(\mathcal{C}(h))$ (notations définies au chapitre 1) et donc avec des hypothèses moins restrictives sur les indices critiques et la dimension de la variété intermédiaire (théorème 2.2.2). On améliore ainsi le résultat principal de [12] en montrant que l'espace $\mathfrak{F}_i(W^{n+1})$ est connexe par arcs dès que $2 \leq i \leq n-2$, $n \geq 5$ (théorème 2.2.3).

D'autre part, comme corollaire du lemme de translation des indices, on montre que le résultat de l'élimination de deux points critiques d'une fonction définie sur un cobordisme élémentaire est en général unique, même si le lemme d'unicité des morts est faux (i.e. si les chemins d'élimination ne sont pas uniques) (théorème 2.2.4).

On en déduit immédiatement que, dans le théorème de J. Wagoner donnant un épimorphisme de $K_2(\pi_1(V))$ sur l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions sans point critique sur $V \times I$ modulo la relation " f_0 et f_1 sont jointes par un chemin dont le graphique est comme sur la figure 1" on peut remplacer la figure 1 par la figure 2.

♦ Les résultats de ce chapitre ont été annoncés dans [7].

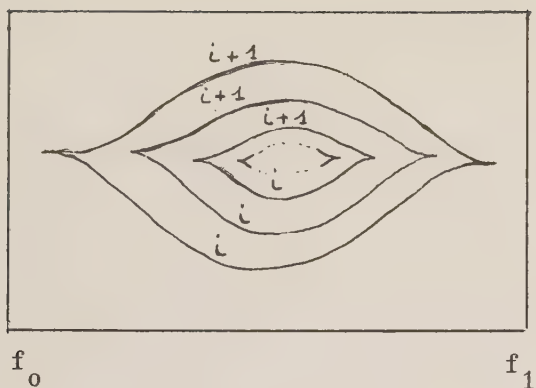


Figure 1

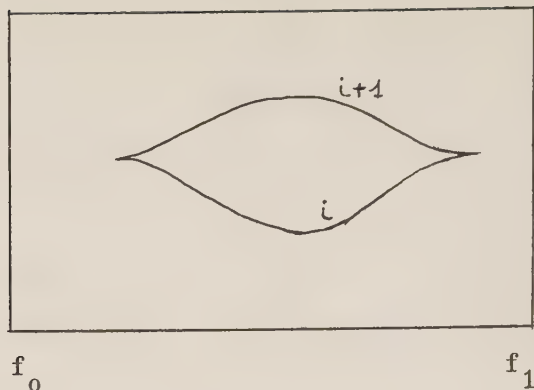


Figure 2

Il reste donc à résoudre le problème suivant, sans doute très difficile : deux fonction $f_0, f_1 : V \times I \rightarrow I$ sans point critique, qui sont jointes par un chemin dont le graphique est comme sur la figure 2, sont-elles dans la même composante connexe par arcs de l'espace des fonctions sans point critique sur $V \times I$? Cerf a montré que la réponse est oui si $\pi_1(V) = 0$ (lemme d'unicité des morts [4], proposition 4 p. III.17), et on a vu dans [12] que la même démonstration ne peut pas s'appliquer au cas où $\pi_1(V) \neq 0$.

L'auteur conjecture qu'en général la réponse est non.

2.1 Enoncé et démonstration du lemme de la queue d'aronde :

Soient $f_0, f_1 : W \rightarrow I$ deux fonctions de Morse excellentes sur une variété W de dimension $n+1$. Soit $i+1$ un indice critique pour f_0 et f_1 .

2.1.1 Théorème : Si $i \leq n-3$, tout chemin de fonctions $\{f_t | t \in I\}$ d'origine f_0 , d'extrémité f_1 , dont le graphique est une queue d'aronde d'indice i (fig.3) est homotope, relativement à ses extrémités, à un chemin dont le graphique est un segment (voir figure 4).

De plus, on peut choisir l'homotopie de façon qu'à chaque étape sauf une, le graphique du chemin soit du type de la figure 3 ou de la figure 4, l'étape exceptionnelle correspondant au passage par la singularité de codimension 2 d'équation locale $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = q(x_1, \dots, x_n) - x_{n+1}^4$,

où q est une forme quadratique non dégénérée (Cusp dans la terminologie de R. Thom).

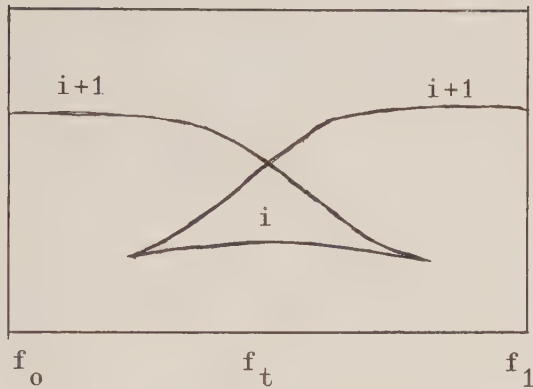


Figure 3

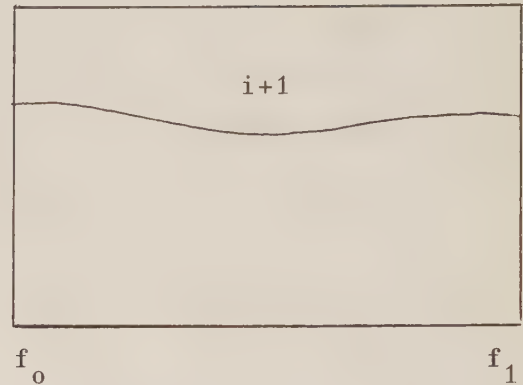


Figure 4

2.1.2 Remarques :

- (1) Le résultat ci-dessus, ainsi que sa démonstration, comporte une grande analogie avec le "théorème de Cancellation" de Smale (voir [5] et la première remarque de [7]).
- (2) Il sera clair d'après la démonstration que le chemin f_t peut comporter d'autres points critiques auxquels n'arrive aucun accident.

2.1.3 Notations :

- (1) On note d_0 , a , d_1 , les trois points critiques de $f_{1/2}$, respectivement d'indice $i+1$, i , $i+1$, et on suppose que d_0 et d_1 sont au même niveau.
- (2) On appellera "bonne homotopie" du chemin $\alpha = \{f_t \mid t \in I\}$ une homotopie à travers des chemins ayant le même graphique (le bord du chemin n'est pas fixé).
- (3) On dira qu'un chemin élémentaire d'élimination issu de h est "associé" à un couple de nappes en bonne position (D, A) s'il existe un plongement adapté φ du modèle d'élimination tel que (D, A) soit l'image par φ du couple de nappes standard ; on a la même définition pour un chemin

élémentaire de croisement en remplaçant couple de nappes par nappe descendante (resp. ascendante), et pour une famille élémentaire à 2 paramètres de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2$ en remplaçant couple de nappes par triple de nappes.

2.1.4 Lemme : Il existe une bonne homotopie entre $\alpha = \{f_t | t \in I\}$ et un chemin $\beta = \{g_t | t \in I\}$ qui s'écrit comme le composé $\beta = \varepsilon_0^{-1} * \gamma_0^{-1} * \gamma_1 * \varepsilon_1$ de deux demi-chemins élémentaires de croisement γ_0, γ_1 issus de $g_{1/2} = f_{1/2}$ et de deux chemins élémentaires d'élimination $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ (voir figure 5) ayant les propriétés suivantes :

- (i) γ_0 (resp. γ_1) est associé à une nappe de $g_{1/2} = f_{1/2}$ montant de d_1 (resp. d_0).
- (ii) ε_0 (resp. ε_1) est associé à un couple de nappes (D_0, A) (resp. (D_1, A)) qui sont adaptées* à toutes les fonctions du chemin γ_0 (resp. γ_1) (D_0, D_1 descendant de d_0, d_1 , A monte de a ; voir figure 6).

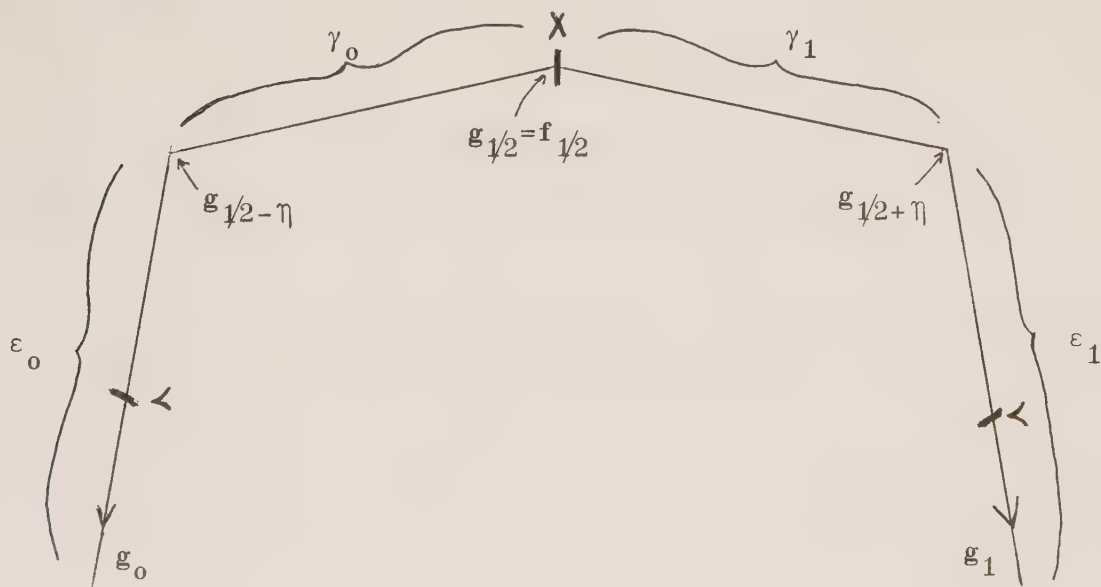


Figure 5 (dans l'espace fonctionnel)

$\angle$	= strate de naissance
$\times$	= strate de croisement

* On dira indifféremment que D est une nappe descendante de la fonction f , ou que D est une nappe descendante adaptée à la fonction f .

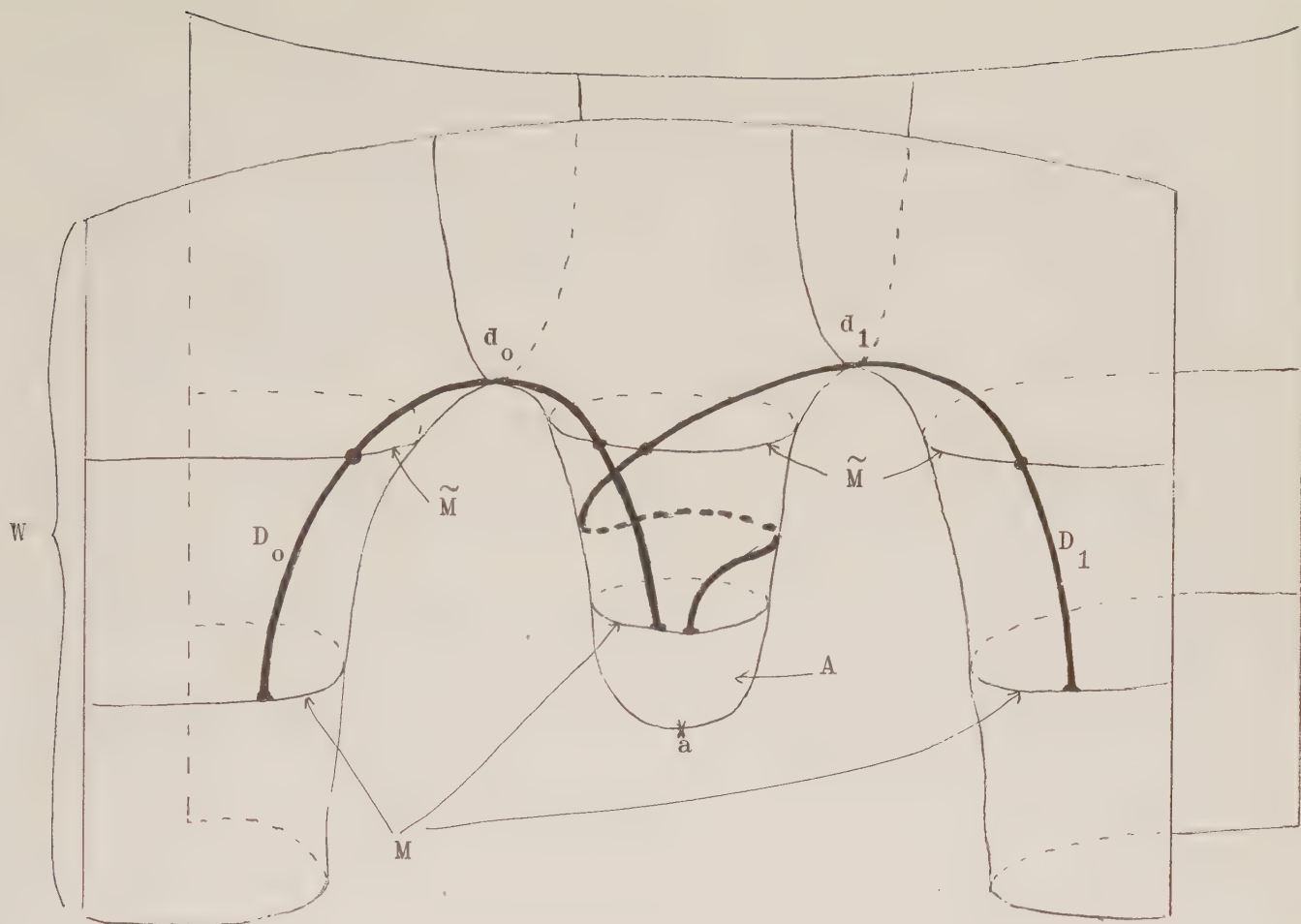


Figure 6 (La fonction $f_{1/2}$ est la fonction hauteur)

Démonstration : C'est une conséquence standard des lemmes de chemins élémentaires de croisement et d'élimination ainsi que de l'acyclicité de l'espace des nappes adaptées à une fonction, descendant (resp. montant) d'un point critique, et limitées à une bande ne contenant pas d'autre point critique de la fonction (voir [4], en particulier la démonstration du lemme 2 chapitre II, paragraphe 2.4).

2.1.5 Lemme : Si $i \leq n-3$, on peut supposer que $D_0 \cap D_1 = \emptyset$. Les nappes (D_0, A, D_1) forment alors un triple en bonne position pour la fonction $f_{1/2}$.

Démonstration : Soit $\mathfrak{M}$ une métrique riemannienne sur W pour laquelle D_0 et A soient des nappes de gradient de $f_{1/2}$. Soit $\tilde{M}$ une surface de niveau de $f_{1/2}$ située entre le niveau de d_0 (et d_1) et la variété M ; on peut choisir $\tilde{M}$ de façon que les i -sphères $D_0 \cap \tilde{M}$ et $D_1 \cap \tilde{M}$ soient disjointes, que $\tilde{M}$ soit une surface de niveau de toutes les fonctions du chemin $\gamma_0^{-1} * \gamma_1 = \{g_t | t \in [\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2} + \eta]\}$, et que toutes ces fonctions coïncident avec $f_{1/2}$ en-dessous de $\tilde{M}$. Tout chemin de nappes adaptées à $f_{1/2}$, d'origine D_1 , et constitué de nappes coïncidant avec D_1 au-dessus de $\tilde{M}$, est aussi un chemin de nappes adaptées à toutes les fonctions du chemin γ_1 (et de même pour D_0, γ_0).

$\mathfrak{M}$ définit un difféomorphisme Ψ de $\tilde{M} \times I$ sur la partie K de W comprise entre $\tilde{M}$ et M ; on a $\Psi(\tilde{M} \cap D_0) \times I = K \cap D_0$, et $K \cap D_1$ définit par l'intermédiaire de Ψ^{-1} une famille à 1 paramètre $\{\varphi_t | t \in I\}$ de plongements de la sphère S^i dans la variété $\tilde{M}$ (non canonique à cause du paramétrage), qui vérifie :

- (1) L'origine φ_0 (qui correspond à $\tilde{M} \cap D_1$) peut être supposée transversale sur le bord $\partial \tilde{A} \subset \tilde{M}$ de la nappe de gradient $\tilde{A}$ issue de A (qui est un prolongement de A),
- (2) l'extrémité φ_1 (qui correspond à $\partial D_1 \subset M$) coupe $\partial \tilde{A}$ transversalement et en un seul point,
- (3) $\varphi_0(S^i) \cap (\tilde{M} \cap D_0) = \emptyset$.

La démonstration du corollaire 5.2 du chapitre I de [4] (cité comme théorème 3.1.1 dans notre chapitre 3) fournit, dès que $1 \leq i \leq n-3$, une homotopie entre le chemin de plongements $\{\varphi_t | t \in I\}$ et un chemin $\{\varphi'_t | t \in I\}$ qui vérifie pour tout $t \in I$: $\varphi'_t(S^i) \cap (\tilde{M} \cap D_0) = \emptyset$; cette homotopie est constante sur l'origine du chemin et ne passe qu'à travers des chemins ayant la propriété (2).

Les conditions de dimension viennent de ce qu'on doit disjoindre de $\tilde{M} \cap D_0$ (qui est de dimension i) un voisinage d'un complexe de dimension 2 (l'"âme" d'un chemin élémentaire homotope au chemin $\{\varphi_t | t \in I\}$) ce qui est possible par position générale dès que $n \geq i+3$.

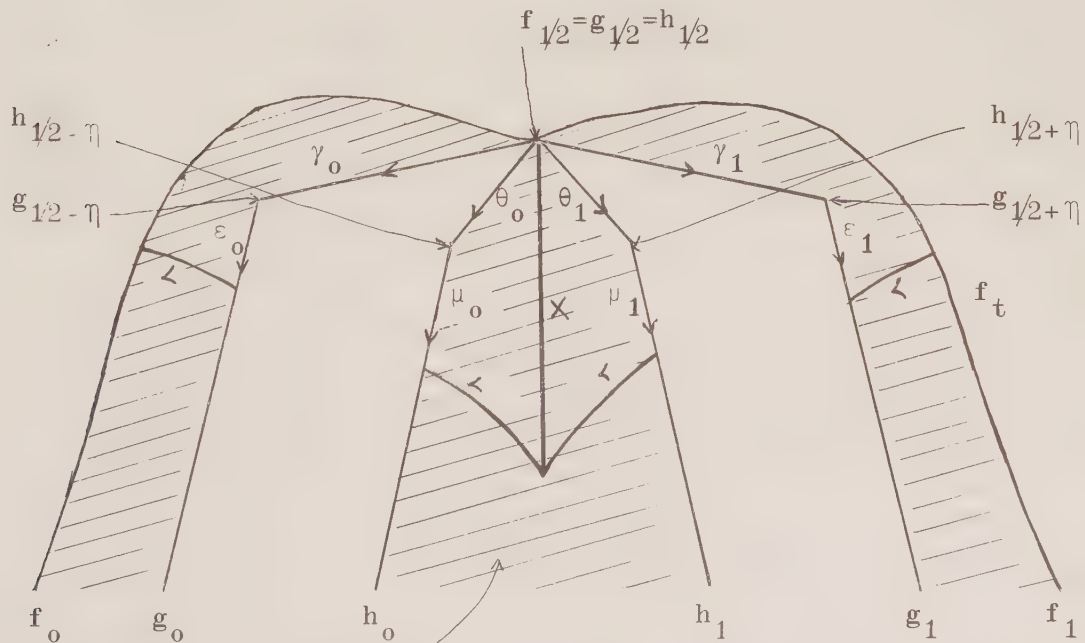
Le cas $i = 0$ est complètement trivial.

On obtient donc, par l'intermédiaire de $\mathfrak{M}$, une homotopie dans l'espace des couples de nappes en bonne position adaptés à toutes les fonctions du chemin γ_1 , entre (D_1, A) et (D'_1, A) , avec $D'_1 \cap D_0 = \emptyset$; en vertu de la fibration de l'espace des plongements adaptés du modèle d'élimination sur l'espace des couples de nappes en bonne position, il existe une homotopie rel. l'origine entre ε_1 et un chemin élémentaire d'élimination ε'_1 associé au couple (D'_1, A) , ce qui démontre le lemme 2.1.5.

On supposera dorénavant que $D_0 \cap D_1 = \emptyset$; le triple de nappes (D_0, A, D_1) est un triple en bonne position adapté à la fonction $f_{1/2}$. On a alors la

2.1.6 Proposition : Il existe une famille élémentaire à 2 paramètres de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2$ passant par $f_{1/2}$ (notations du **paragr.1.2**) associée au triple de nappes (D_0, A, D_1) .

Avant de prouver la proposition 2.1.6, montrons comment en déduire le théorème 2.1.1. La situation est résumée sur la figure 7.



famille à 2 paramètres fournie par la proposition 2.1.6

Figure 7

Le problème étant symétrique, nous ne nous occuperons que de la moitié gauche de la figure 7.

Les chemins γ_0 et θ_0 sont des demi-chemins élémentaires de croisement associés à une nappe de $f_{1/2}$ montant du point critique d_1 . L'espace de ces chemins est acyclique, et on voit facilement que cela a la conséquence suivante : il existe une famille à 1 paramètre $\{\xi_t \mid t \in I\}$ de chemins d'origine $f_{1/2}$ qui vérifie :

$$(1) \quad \xi_0 = \theta_0, \quad \xi_1 = \gamma_0$$

(2) Pour tout $t \in I$, toutes les fonctions du chemin ξ_t coïncident avec $f_{1/2}$ sur un voisinage $\mathcal{V}_0$ de $D_0 \cup A$.

On construit alors successivement trois homotopies entre les chemins μ_0 (bord de la famille élémentaire à 2 paramètres fournie par la proposition 2.1.6) et ε_0 (voir figure 8).

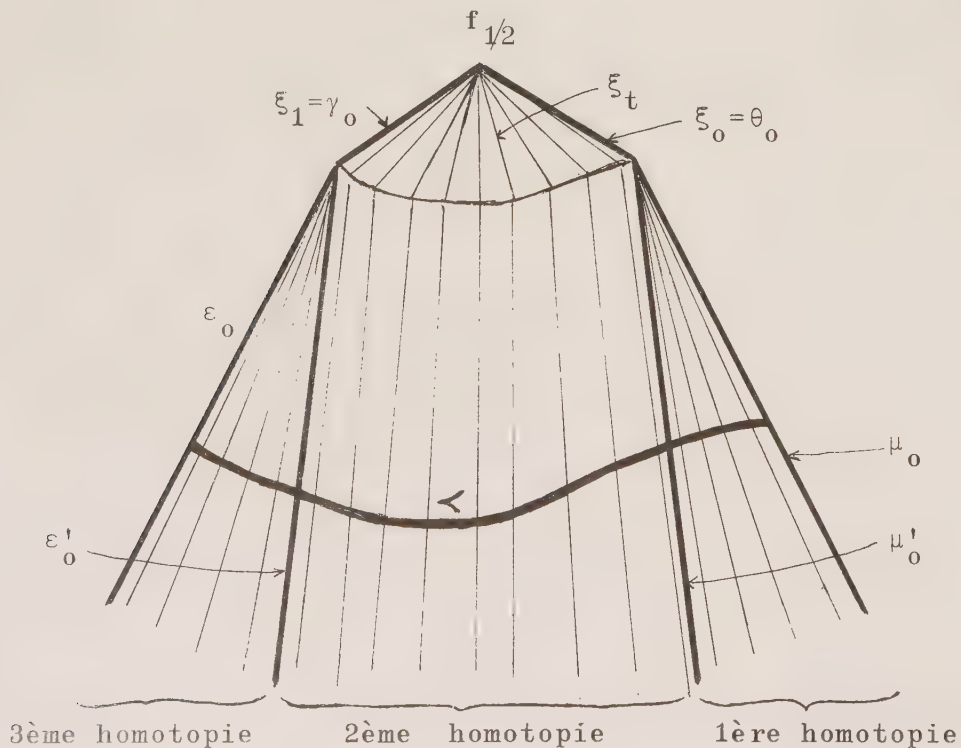


Figure 8

La première homotopie sert à remplacer μ_0 par un chemin élémentaire d'élimination μ'_0 défini par un plongement ϕ du saturé du voisinage double modèle dans W (notations de [5] chapitre III, paragraphe 4) tel que l'image par ϕ du voisinage double modèle soit contenue dans $\mathcal{V}_0$. Une telle homotopie existe grâce à l'acyclicité du complexe des chemins élémentaires d'élimination associés à un couple fixé de nappes en bonne position (Remarque 1.4.5).

La deuxième homotopie est formée de chemins élémentaires d'élimination d'origine variable, mais tous associés à un unique couple de nappes en bonne position, et même à un unique plongement ϕ du voisinage double modèle dans $\mathcal{V}_0$ (ceci est possible grâce à la propriété (2) de la famille de chemins $\{\xi_t | t \in I\}$). Une telle homotopie existe car étant donné une fonction f , et un plongement adapté à f du voisinage double modèle, on en déduit un plongement adapté à f bien déterminé de son saturé, en utilisant une métrique riemannienne fixée sur W prolongeant l'image par ϕ de la métrique standard sur le voisinage double modèle.

La troisième homotopie est encore une conséquence de la remarque 1.4.5 puisque ε_0 et ε'_0 sont deux chemins élémentaires d'élimination de même origine associés au même couple de nappes en bonne position (D_0, A) .

Le théorème 2.1.1 est ainsi démontré.

Démonstration de la proposition 2.1.6 :

Nous allons imiter la démonstration du théorème de Cancellation de Smale, telle qu'elle est exposée dans [5], chapitre III paragraphe 4, ou [4], chapitre III. Si on remplace couple de nappes en bonne position par triple de nappes en bonne position, voisinage double modèle par voisinage triple modèle, etc..., les détails de la construction sont identiques, aussi n'en indiquerons-nous que les grandes lignes.

(a) Définition des voisinages triples et de leurs saturés :

Soit $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse, soient d_0, a, d_1 trois points critiques de f d'indices respectifs $i+1, i, i+1$, tels que $f(d_0) = f(d_1) > f(a)$. On suppose que $f^{-1}([f(a) - \varepsilon, f(d_0) + \varepsilon])$ ne contient pas d'autre point critique de f .

On a défini au chapitre 1 ce qu'on entend par un triple de nappes en bonne position (D_0, A, D_1) . Rappelons que ces trois nappes sont limitées à une même variété de niveau M , que $D_0 \cap D_1 = \emptyset$, et que $\partial D_0, \partial A$ d'une part, $\partial D_1, \partial A$ d'autre part, se coupent transversalement et en un seul point.

Il existe alors une métrique riemannienne $\mathfrak{M}$ sur W admettant D_0, A, D_1 pour nappes de gradient.

Soit M_- (resp. M_+) une variété de niveau de f située immédiatement au-dessous de a (resp. immédiatement au-dessus de d_0 et d_1).

Soit $\tilde{A}$ l'adhérence de la réunion des lignes de gradient ascendantes de a limitées à M_+ ; $\tilde{A}$ est appelée nappe ascendante saturée de a et est difféomorphe à $D^{n-i} \times I$; la partie $D^{n-i} \times \{0\}$ (resp. $D^{n-i} \times \{1\}$) de son bord est la nappe de gradient ascendante de d_0 (resp. d_1) limitée à M_+ (voir figure 9). On définit de même $\tilde{D}_0$ et $\tilde{D}_1$, nappes descendantes saturées de d_0 et d_1 , définies par $\mathfrak{M}$ et M_- . $(\tilde{D}_0, \tilde{A}, \tilde{D}_1)$ est un triple de nappes saturées en bonne position.

Soit T_0 (resp. θ , resp. T_1) un voisinage tubulaire de ∂D_0 (resp. ∂A , resp. ∂D_1) dans M . On peut supposer que T_0, θ, T_1 sont en bonne position (voir définition précise dans [4] et surtout figure 10).

Soit N_0, N_1 (resp. P) la réunion des lignes de gradient ascendantes issues de T_0, T_1 (resp. descendantes issues de θ) limitées à M_+ (resp. M_-). Soit U la réunion $N_0 \cup P \cup N_1$; U est appelé voisinage triple de (d_0, a, d_1) défini par $\mathfrak{M}, T_0, \theta, T_1, M_-, M_+$. On appelle voisinage triple saturé défini par les mêmes données l'adhérence $\tilde{U}$ de la réunion des lignes de gradient

Figure 9

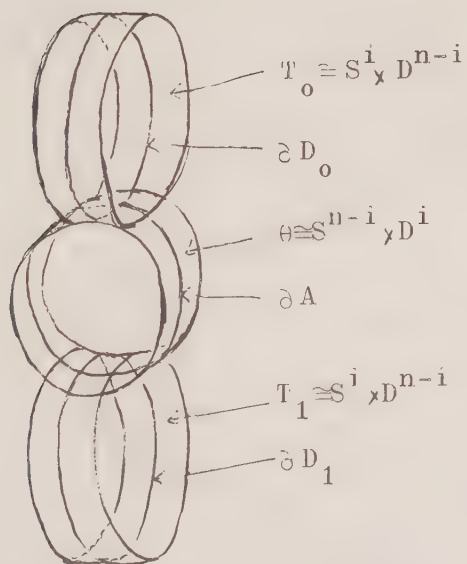
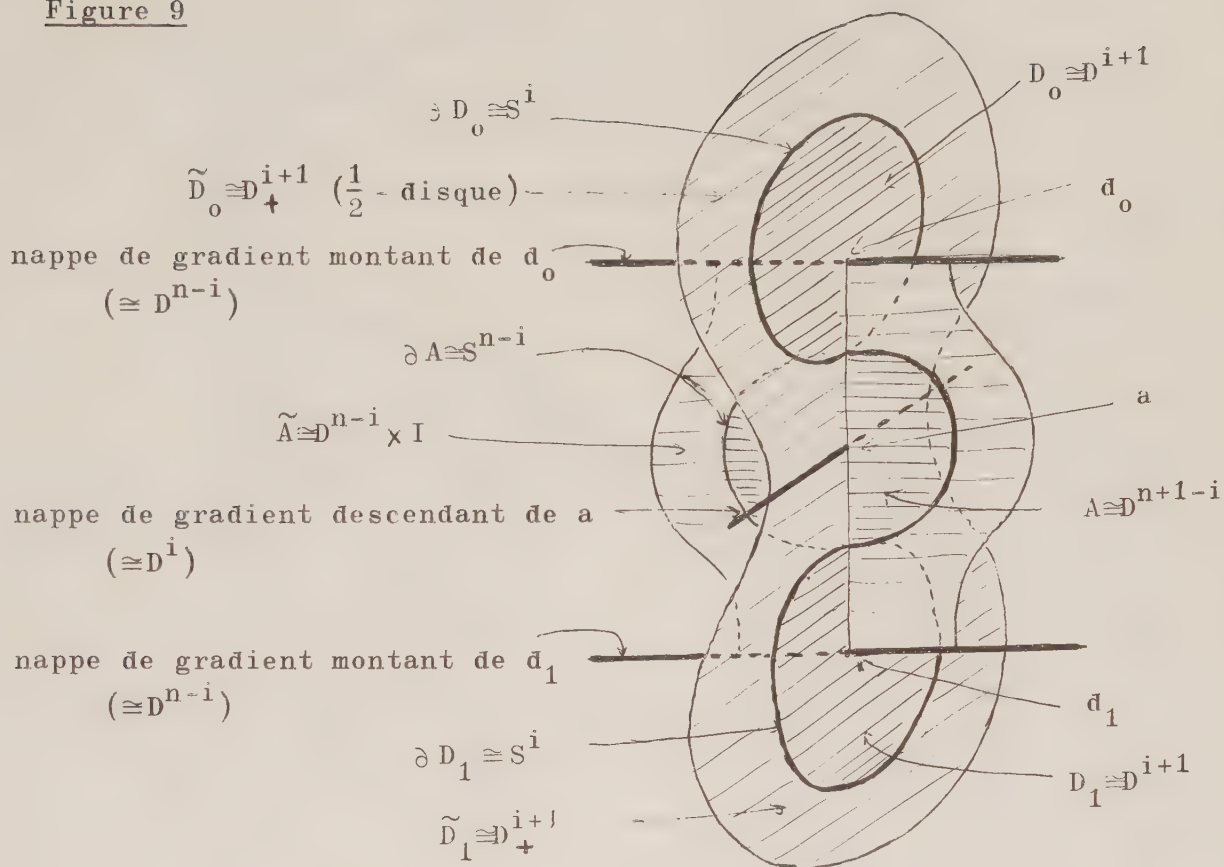


Figure 10

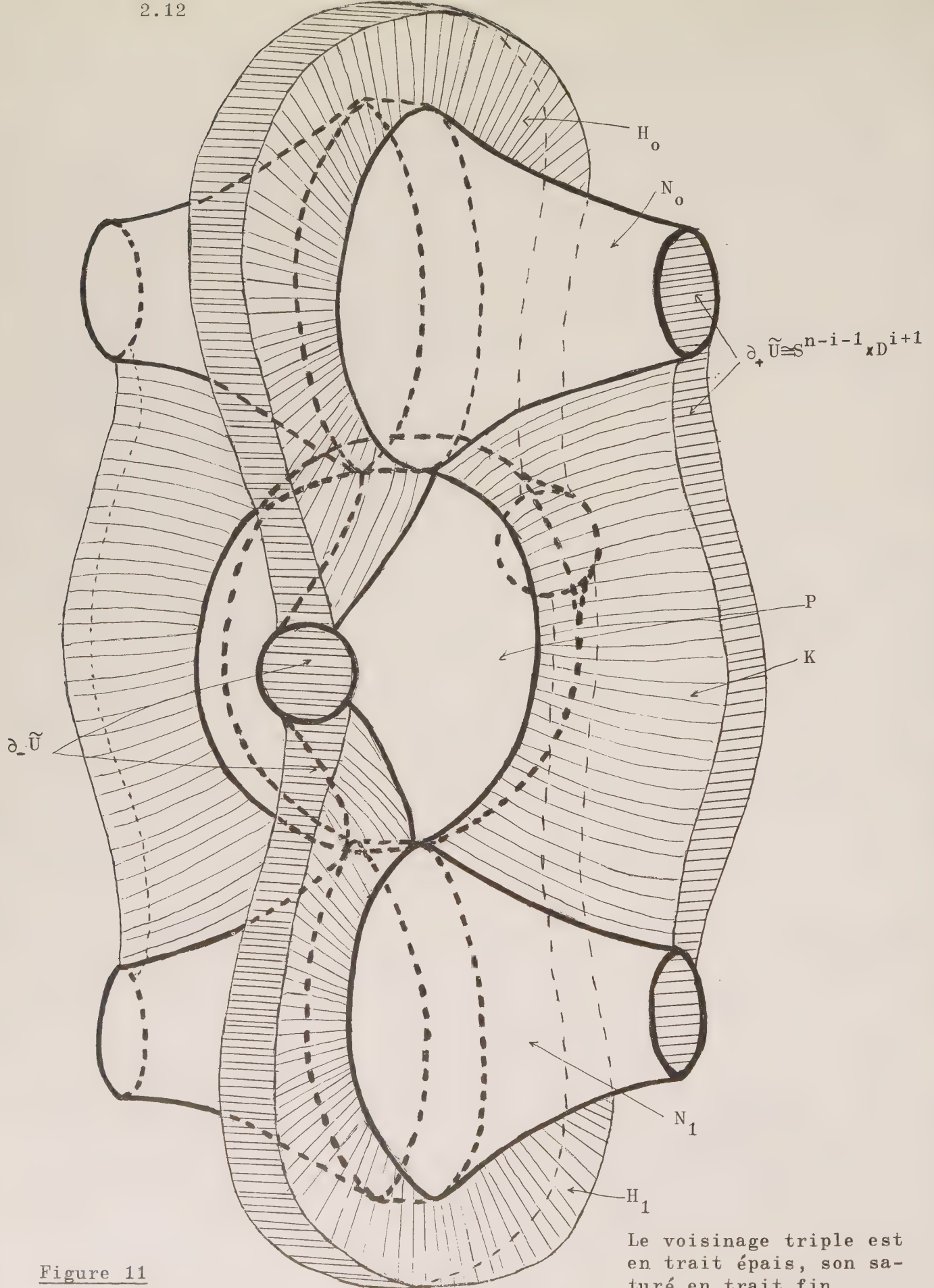


Figure 11

Le voisinage triple est
en trait épais, son sa-
turé en trait fin.

rencontrant $T_0 \cup \theta \cup T_1$, limitées à M_- et M_+ ; $\tilde{U}$ est la réunion de N_0, P, N_1, H_0, K, H_1 , où H_0 (resp. H_1) est la réunion des lignes de gradient descendantes issues de $\overline{T_0 - (T_0 \cap \theta)}$ (resp. $\overline{T_1 - (T_1 \cap \theta)}$) limitées à M_- , et où K est la réunion des lignes de gradient ascendantes issues de $\overline{\theta - [(T_0 \cap \theta) \cup (T_1 \cap \theta)]}$ limitées à M_+ (voir figure 11). On a $H_0 \cong D^i \times D^{n-i} \times I \cong H_1$, et $K \cong S^{n-i-1} \times I \times D^i \times I$.

La partie $\partial_+ \tilde{U}$ de $\partial \tilde{U}$ située dans M_+ s'écrit comme une réunion

$$\begin{array}{c} S^{n-i-1} \times D^{i+1} \quad \cup \quad S^{n-i-1} \times I \times D^i \quad \cup \quad S^{n-i-1} \times D^{i+1} \\ S^{n-i-1} \times \partial_+ D^{i+1} \cong S^{n-i-1} \times \{0\} \times D^i \quad S^{n-i-1} \times \{1\} \times D^i \cong S^{n-i-1} \times \partial_+ D^{i+1} \end{array}$$

et est donc difféomorphe à $S^{n-i-1} \times D^{i+1}$ après arrondissement des arêtes rentrantes.

La partie $\partial_- \tilde{U}$ de $\partial \tilde{U}$ située dans M_- s'écrit comme une réunion

$$\begin{array}{c} D^i \times D^{n-i} \quad \cup \quad S^{i-1} \times D^{n+1-i} \quad \cup \quad D^i \times D^{n-i} \\ S^{i-1} \times D^{n-i} \cong S^{i-1} \times \partial_0 D^{n+1-i} \quad S^{i-1} \times \partial_1 D^{n+1-i} \cong S^{i-1} \times D^{n-i} \end{array}$$

[où $(D^{n+1-i}, \partial_0 D^{n+1-i}, \partial_1 D^{n+1-i}) \cong (D^{n-i} \times I, D^{n-i} \times \{0\}, D^{n-i} \times \{1\})$] et est donc difféomorphe à $S^i \times D^{n-i}$ après arrondissement des arêtes rentrantes.

On voit alors facilement qu'après arrondissement des arêtes rentrantes, $\tilde{U}$ est naturellement difféomorphe au voisinage de Morse d'un point critique d'indice $i+1$.

(b) Démonstration de la proposition 2.1.6 :

Il est clair que cette construction a ce qu'il faut de fonctorialité pour qu'il suffise maintenant de s'occuper d'une fonction standard $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'on en a exhibé au chapitre 1. En imitant toujours la démonstration du théorème de Cancellation, nous voyons que la seule chose qui nous reste à prouver est l'existence de voisinages triples saturés de la fonction standard f suffisamment grands pour contenir le support

de la famille à 2 paramètres standard de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2$ issue de f . Il suffit de raisonner dans la variété intermédiaire M , et de remarquer qu'on peut choisir T_0 , θ , T_1 de façon que $T_0 \cup \theta \cup T_1$ contienne un compact arbitrairement fixé dans M . Mais, par définition, M est obtenue à partir de $S^i \times \mathbb{R}^{n-i}$ par une chirurgie sur 0 d'indice i , c'est-à-dire $M \cong S^i \times \mathbb{R}^{n-i} - S^{i-1} \times D^{n+1-i} + D^i \times S^{n-i}$ (modulo arrondissement) ou encore (la chirurgie étant faite sur 0)

$$M \cong S^i \times \mathbb{R}^{n-i} \# S^i \times S^{n-i}.$$

D'autre part, $T_0 \cup \theta \cong S^i \times S^{n-i} - \text{int } D^n$, et le plombage de $T_1 \cong S^i \times D^{n-i}$ avec $T_0 \cup \theta$ s'écrit encore $S^i \times D^{n-i} \# S^i \times S^{n-i}$, l'inclusion dans M correspondant à l'inclusion naturelle de $S^i \times D^{n-i}$ dans $S^i \times \mathbb{R}^{n-i}$, d'où la conclusion. La figure 12 montre le cas $i = n-1$.

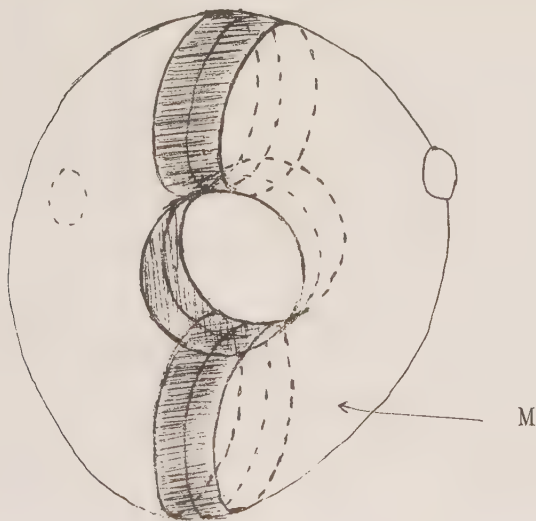


Figure 12

2.1.7 Remarque : Il serait sans doute plus agréable pour démontrer le théorème 2.1.1 de modifier la définition d'un chemin élémentaire d'élimination afin de pouvoir prendre son origine sur une strate de croisement ; nous n'avons pas voulu alourdir le chapitre 1, et nous pensons d'autre part que la notion de chemin élémentaire n'a pas encore atteint son état

définitif, ce qui enlève une partie de leur intérêt à des améliorations de détail comme celle-ci.

2.2 Quelques conséquences du lemme de la queue d'aronde :

2.2.1 Lemme : Soit $F: I \rightarrow \mathfrak{F}(W)$ une application continue générique de l'intervalle dans l'espace des fonctions différentiables réelles sur une variété W de dimension $n+1$. On suppose que le graphique de F est comme sur la figure 13 (a). Si $i \leq n-3$, et si le niveau où a lieu la première naissance est connexe*, il existe une homotopie $\{F_t \mid t \in I\}$ constante sur ∂I , entre $F_0 \equiv F$ et une application F_1 de I dans $\mathfrak{F}^0(W)$ (le graphique est donc comme sur la figure 13 (b)) :

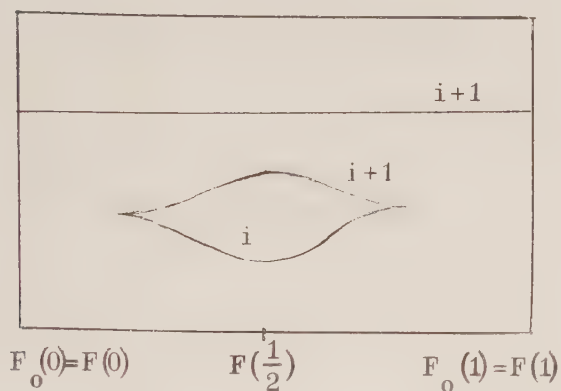
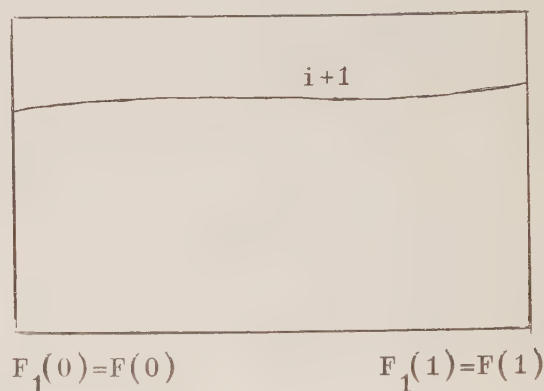


Figure 13 (a)



(b)

[il peut y avoir au-dessus de ce groupe de points critiques ou au-dessous d'autres points critiques auxquels n'arrive aucun accident.]

Démonstration : L'hypothèse faite entraîne l'existence d'un chemin de fonctions G issu de $F(\frac{1}{2})$ réalisant le croisement des deux points critiques d'indice $i+1$ et l'élimination avec le point critique d'indice i du

* ou simplement s'il existe une nappe de $F(\frac{1}{2})$ descendant du point critique d'indice $i+1$ le plus haut, qui rencontre la composante connexe du niveau de la première naissance où a lieu cette naissance.

point critique d'indice $i+1$ le plus bas après le croisement. On obtient ainsi une première homotopie de F jusqu'à une application dont le graphique est représenté sur la figure 14 :

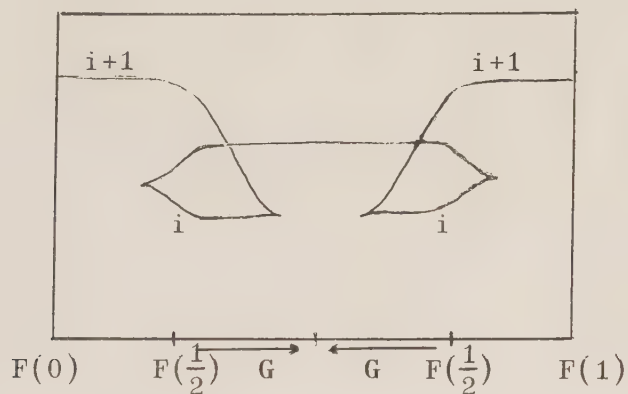


Figure 14

On conclut en appliquant deux fois le théorème 2.1.1.

On a représenté sur la figure 15 la trace de la stratification naturelle de $\mathfrak{F}(W)$ induite sur D^2 par l'homotopie $\{F_t | t \in I\}$.

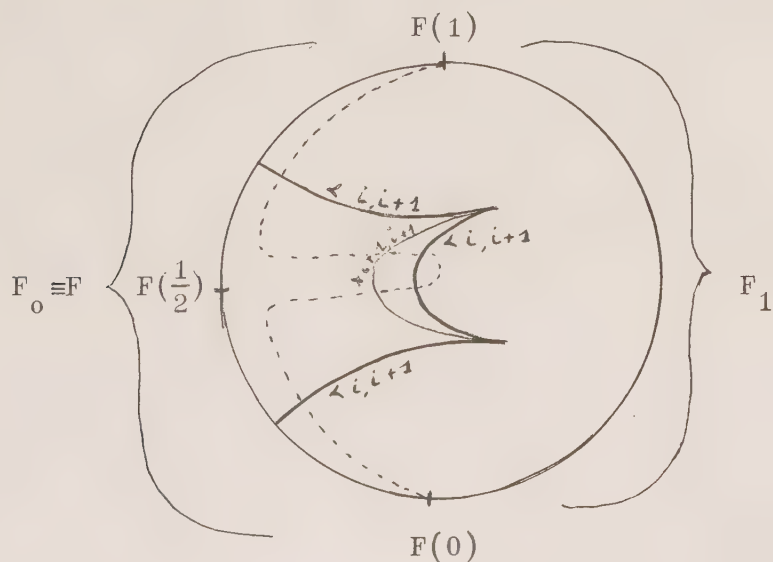


Figure 15

[En pointillé, le chemin dont le graphique est représenté sur la figure 14.]

Rappelons qu'on a montré dans [42] que, dès que $\pi_1(W) \neq 0$, il n'existe pas en général d'homotopie $\{F_t | t \in I\}$ constante sur ∂I telle que la stratification induite sur D^2 soit simplement un segment.

Le théorème suivant améliore le théorème 3.1 de [42], et la démonstration que nous en donnons présente l'avantage de ne nécessiter aucun calcul d'obstruction :

2.2.2 Théorème (lemme de translation des indices) :

Soit $F: I \rightarrow \mathfrak{F}(W)$ une application continue générique de l'intervalle dans l'espace des fonctions différentiables réelles sur une variété W de dimension $n+1$. On suppose que le graphique de F est comme sur la figure 16 (a). Si $i \leq n-3$, il existe une homotopie $\{F_t | t \in I\}$ constante sur ∂I , entre $F_0 \equiv F$ et une application F_1 de I dans $\mathfrak{F}(W)$ dont le graphique est comme sur la figure 16 (b).

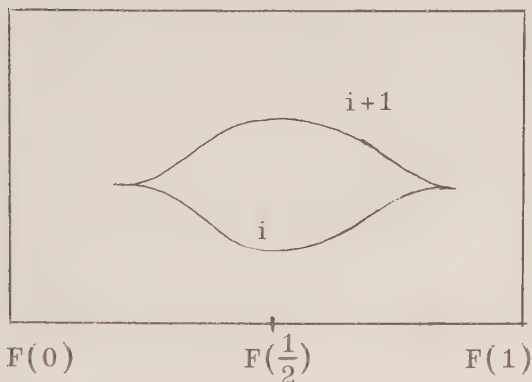
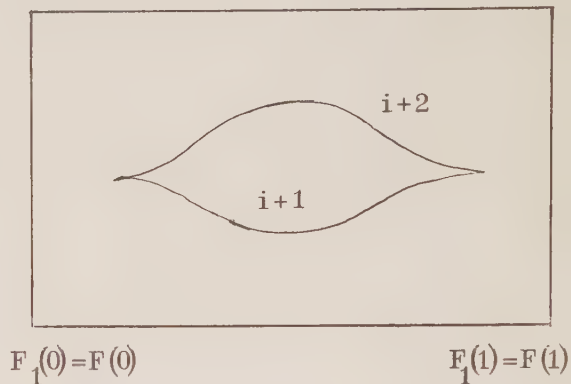


Figure 16

(a)



(b)

[La remarque faite à la figure 13 s'applique ici.]

1ère démonstration (analogue à celle du lemme 2.2.1) :

Soit H un chemin de fonctions d'origine $F(\frac{1}{2}) \equiv H(0)$ sur lequel naît, au-dessus des deux points critiques considérés, un couple de points critiques d'indices respectivement $i+1$ et $i+2$. On peut choisir le lieu de la naissance de façon que H se prolonge en un chemin (toujours appelé H) du même type que le chemin G de la démonstration du lemme 2.2.1.

On obtient ainsi une homotopie de F jusqu'à une application dont le graphique est représenté sur la figure 17 (a).

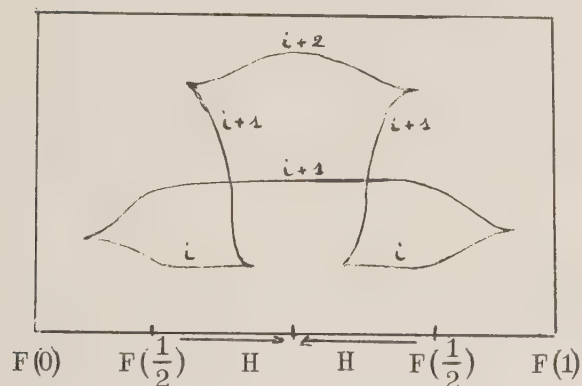
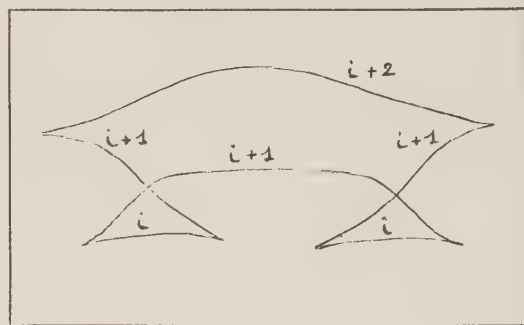


Figure 17 (a)



(b)

On passe de là à une application dont le graphique est représenté sur la figure 17 (b) en appliquant deux fois le lemme des singularités indépendantes (voir [4] chapitre IV, paragraphe 1, proposition 1). On conclut, comme pour le lemme 2.2.1, par deux applications du théorème 2.1.1.

La trace de la stratification naturelle de $\mathfrak{F}(W)$ induite sur D^2 par l'homotopie $\{F_t | t \in I\}$ est représentée sur la figure 18.

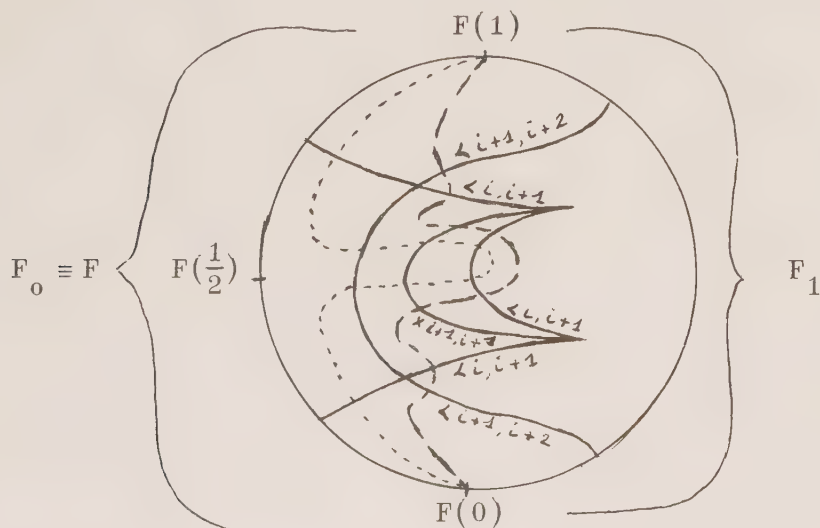


Figure 18

[En pointillés courts (resp. longs), le chemin dont le graphique est représenté sur la figure 17 (a) (resp. la figure 17 (b)).]

2ème démonstration (par la double queue d'aronde) :

Les étapes principales sont représentées sur les figures 19 (a) et 19 (b) ; la stratification sur D^2 est représentée sur la figure 20.

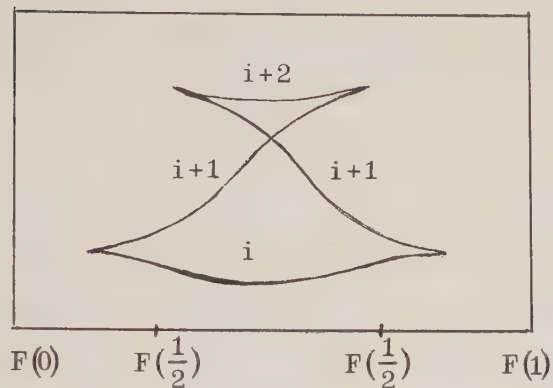
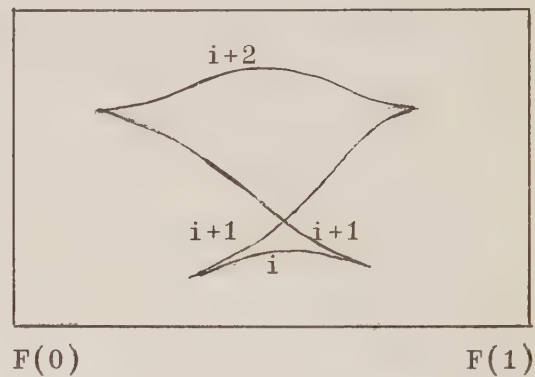


Figure 19 (a)



(b)

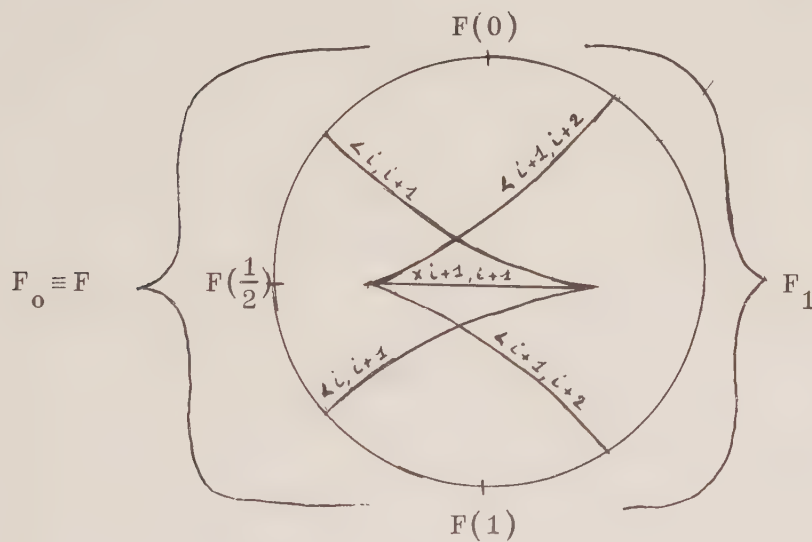


Figure 20

Avec les méthodes de [12] on déduit immédiatement du théorème 2.2.2 le théorème suivant, qui améliore le théorème 4.1 de [12] (on a gardé les mêmes notations).

2.2.3 Théorème : Soit W un h -cobordisme orientable de dimension $n+1$. Si $n \geq 5$, et si $2 \leq i \leq n-2$, l'espace $\mathfrak{F}_i(W)$ est connexe par arcs.

On déduit aussi du lemme 2.2.1 et du théorème 2.2.2 le :

2.2.4 Théorème (unicité faible des éliminations sur un cobordisme élémentaire) :

Soit $F: I \rightarrow \mathfrak{F}(W)$ une application continue générique de l'intervalle dans l'espace des fonctions différentiables réelles sur une variété W de dimension $n+1$. On suppose que le graphique de F est comme sur la figure 21 (a) et qu'il existe une nappe descendant du point critique d'indice j jusqu'à la composante connexe du niveau de la première naissance où a lieu cette naissance. Si $3 \leq j \leq n-2$, il existe une homotopie $\{F_t \mid t \in I\}$ constante sur ∂I entre $F_0 \equiv F$ et une application F_1 de I dans $\mathfrak{F}^0(W)$ (le graphique est donc comme sur la figure 21 (b)).

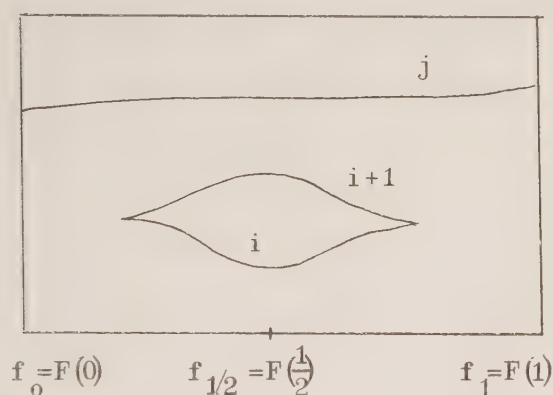
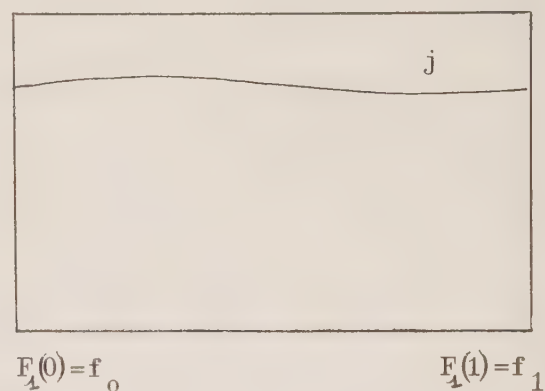


Figure 21 (a)



(b)

[La remarque faite pour les figures 13 et 16 est encore valable ici.]

Ce théorème dit en particulier que si W est un cobordisme élémentaire d'indice j et de dimension $n+1$, si $f_0: W \rightarrow I$ est une fonction ayant un seul point critique (donc d'indice j), si $f_1: W \rightarrow I$ est obtenue à partir de f_0 en faisant naître une paire de points critiques (au-dessous du point critique d'indice j ou au-dessus*) puis en les éliminant, et si $3 \leq j \leq n-2$,

* il suffit de remplacer f par $1-f$ et de remarquer que les conditions $3 \leq j \leq n-2$ et $3 \leq n+1-j \leq n-2$ sont équivalentes.

2ème démonstration (par la double queue d'aronde) :

Les étapes principales sont représentées sur les figures 19 (a) et 19 (b) ; la stratification sur D^2 est représentée sur la figure 20.

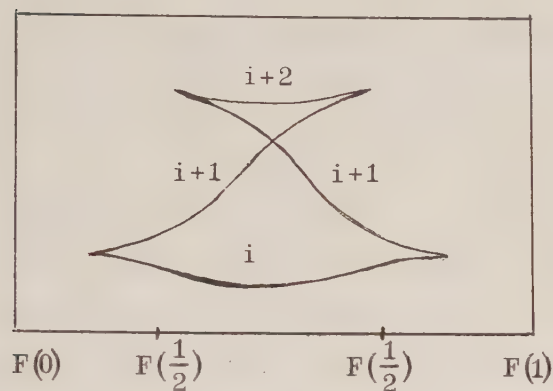
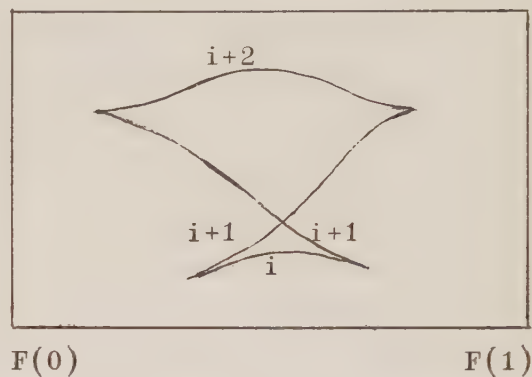


Figure 19 (a)



(b)

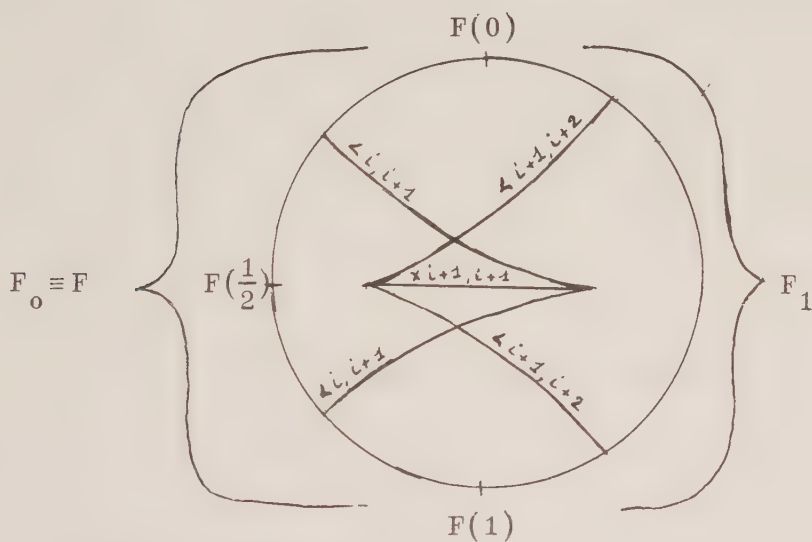


Figure 20

Avec les méthodes de [12] on déduit immédiatement du théorème 2.2.2 le théorème suivant, qui améliore le théorème 4.1 de [12] (on a gardé les mêmes notations).

2.2.3 Théorème : Soit W un h -cobordisme orientable de dimension $n+1$. Si $n \geq 5$, et si $2 \leq i \leq n-2$, l'espace $\mathfrak{F}_i(W)$ est connexe par arcs.

On déduit aussi du lemme 2.2.1 et du théorème 2.2.2 le :

2.2.4 Théorème (unicité faible des éliminations sur un cobordisme élémentaire) :

Soit $F: I \rightarrow \mathfrak{F}(W)$ une application continue générique de l'intervalle dans l'espace des fonctions différentiables réelles sur une variété W de dimension $n+1$. On suppose que le graphique de F est comme sur la figure 21 (a) et qu'il existe une nappe descendant du point critique d'indice j jusqu'à la composante connexe du niveau de la première naissance où a lieu cette naissance. Si $3 \leq j \leq n-2$, il existe une homotopie $\{F_t | t \in I\}$ constante sur ∂I entre $F_0 \equiv F$ et une application F_1 de I dans $\mathfrak{F}^0(W)$ (le graphique est donc comme sur la figure 21 (b)).

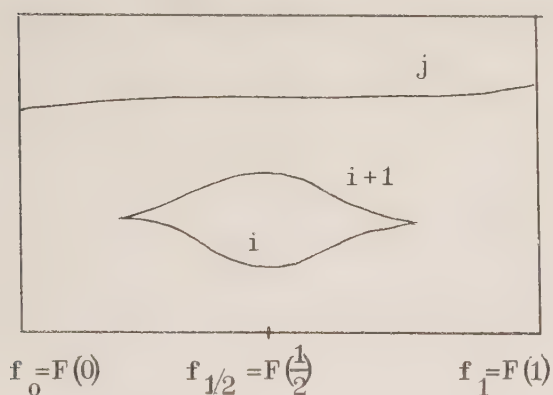
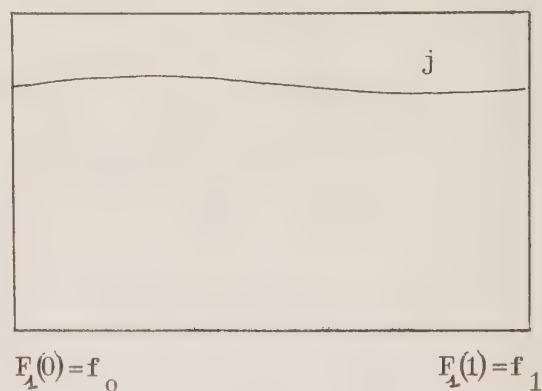


Figure 21 (a)



(b)

[La remarque faite pour les figures 13 et 16 est encore valable ici.]

Ce théorème dit en particulier que si W est un cobordisme élémentaire d'indice j et de dimension $n+1$, si $f_0: W \rightarrow I$ est une fonction ayant un seul point critique (donc d'indice j), si $f_1: W \rightarrow I$ est obtenue à partir de f_0 en faisant naître une paire de points critiques (au-dessous du point critique d'indice j ou au-dessus[♦]) puis en les éliminant, et si $3 \leq j \leq n-2$,

♦ il suffit de remplacer f par $1-f$ et de remarquer que les conditions $3 \leq j \leq n-2$ et $3 \leq n+1-j \leq n-2$ sont équivalentes.

alors f_0 et f_1 sont dans la même composante connexe de la strate des fonctions sur W ayant un seul point critique (d'indice j).

Nous appelons ce théorème "unicité faible des éliminations" car les chemins d'élimination d'origine $f_{1/2}$ aboutissant à f_0 et f_1 ne sont en général pas homotopes à travers des chemins du même type (voir [12]) (s'ils l'étaient on dirait qu'il y a "unicité forte des éliminations" ; c'est le cas si W est simplement connexe).

Démonstration :

1er cas : $j \geq i+1$. On a donc $i+1 \leq n-2$, c'est-à-dire $i \leq n-3$, et on peut appliquer le théorème 2.2.2 $(j-i-1)$ -fois pour obtenir une homotopie constante sur ∂I entre F et une application dont le graphique est comme sur la figure 13 (a), où i est remplacé par $j-1$; il suffit alors d'appliquer le lemme 2.2.1, ce qui est possible puisque $j-1 \leq n-3$.

2ème cas : $j \leq i$. On a donc $3 \leq i$, c'est-à-dire $n-i \leq n-3$, et on peut appliquer le théorème 2.2.2 $(i+1-j)$ fois en remplaçant toutes les fonctions f par la fonction $1-f$ pour obtenir une homotopie constante sur ∂I entre F et une application dont le graphique est comme sur la figure 13 (a), où i est remplacé par $j-1$; on termine comme à la première étape.

Pour conclure ce chapitre, remarquons que, compte-tenu du théorème 2.2.4, l'énoncé du théorème 2.2.2 n'est vraiment utile que si W est le produit d'une variété V par l'intervalle I et si $F(0)$ et $F(1)$ sont des fonctions sans point critique. Comme nous l'avons dit dans l'introduction du chapitre, le calcul du nombre de composantes connexes de l'espace $\mathcal{E}(V \times I)$ des fonctions sans point critique sur $V \times I$ se sépare en deux parties distinctes :

- (1) Le calcul du nombre de composantes connexes de l'espace des fonctions de Morse sur $V \times I$ ayant un couple de points critiques : une partie de ce problème a été résolue par J. Wagoner (voir [23] où il y a

une erreur que nous avons signalée à l'auteur ; cette erreur revient à admettre que la partie qui suit se résoud par l'affirmative).

- (2) Le problème de l'unicité faible des éliminations sur un cobordisme trivial : deux fonctions $f_0, f_1 : V \times I \rightarrow I$ sans point critique qui sont jointes par un chemin dont le graphique est comme sur la figure 2 (voir paragraphe 2.0) sont-elles dans la même composante connexe par arcs de l'espace $\mathcal{E}(V \times I)$ des fonctions sans point critique sur $V \times I$? Nous avons dit dans l'introduction de ce chapitre que nous penchons pour une réponse négative, lorsque $\pi_1(V) \neq 0$.



CHAPITRE 3

L'UNICITE DE L'ELIMINATION ET DE L'APPARITIONDES QUEUES D'ARONDE ET SES CONSEQUENCES

3.0 Ce chapitre généralise les résultats du chapitre précédent à des familles à deux paramètres de fonctions.

Le premier paragraphe, assez long, est consacré à un théorème technique (théorème 3.1.2) qui nous permettra de raisonner dans un domaine très large de dimensions comme dans le domaine stable ; la démonstration de ce théorème est une illustration des méthodes du chapitre 1.

Les deux paragraphes suivants sont consacrés à la démonstration des théorèmes annoncés dans le titre du chapitre (théorèmes 3.2.1 et 3.3.1).

Au paragraphe 3.4, on applique le théorème 3.2.1 à la démonstration de l'unicité du résultat d'une famille à 1 paramètre d'éliminations pour une fonction définie sur un cobordisme élémentaire (théorème 3.4.1), et aussi au lemme de translation des indices à 1 paramètre (théorème 3.4.2).

Ces deux corollaires ont un intérêt nouveau, car on verra dans le chapitre 5 que, même si la variété intermédiaire a toute la connexité voulue, il existe des familles à 1 paramètre non triviales de chemins d'élimination d'origine fixée.

Pour des familles à 1 paramètre, le problème posé à la fin du paragraphe 2.0 se pose donc déjà pour les lacets de fonctions sans point critique définies sur $S^n \times I$ (S^n = sphère de dimension n).

Enfin, dans le paragraphe 3.5, on montre l'importance de la simplicité homotopique de l'espace des "chemins en queue d'aronde" d'origine

fixée (voir définition au paragraphe 3.3.4), source de beaucoup de phénomènes rencontrés précédemment, et de leur généralisation à un nombre quelconque de paramètres. On reviendra sur ce dernier point à la fin du chapitre 5.

3.1 Un théorème de plongement

3.1.0 Soit M^n (resp. Y^{n-i}) une variété sans bord de dimension n (resp. $n-i$), X^i une variété compacte sans bord de dimension i . On se donne deux plongements propres et lisses

$$f_0 : X \rightarrow M \quad , \quad g_0 : Y \rightarrow M \quad ;$$

on note respectivement X_0 et Y_0 leurs images. Enfin, soit $\mathcal{X}$ la composante connexe de f_0 dans l'espace des plongements lisses de X dans M , muni de la topologie C^∞ .

La donnée de $Y_0 \subset M$ permet de définir une stratification de $\mathcal{X}$: la strate de codimension 0, notée $\mathcal{X}^0$, est la partie de $\mathcal{X}$ formée des plongements de X dans M dont l'image est transversale sur Y_0 ; la strate de codimension 1, notée $\mathcal{X}^1$, est la partie de $\mathcal{X}$ formée des plongements dont l'image est transversale sur Y_0 partout sauf en un point exactement où il y "contact d'ordre 1" (voir [4] chapitre 5, § 5.2). Nous reviendrons plus loin sur ces définitions ainsi que sur celle de la strate de codimension 2.

Dans [4] on trouve le théorème suivant

3.1.1 Théorème (Cerf) : On suppose $n \geq 5$ et $n-i \geq 3$; on suppose en plus que le fibré normal à X_0 dans M admet une section. Alors tout lacet relatif de $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^0)$ est homotope (avec origine fixe et extrémité restant dans $\mathcal{X}^0$) à un chemin tel que l'application $F : X \times I \rightarrow M$ associée* soit un plongement lisse.

* 1) On notera I l'intervalle $[0,1]$.

2) On identifiera toujours une application F d'un compact K dans $\mathcal{X}$ à une application F de $X \times K$ dans M .

Le but de ce paragraphe est de généraliser ce théorème à des familles à 2 paramètres, plus précisément :

3.1.2 Théorème : On suppose $n \geq 7$ et $n-i \geq 5$; on suppose en plus que le fibré normal à X_0 dans M admet deux sections indépendantes. Soit $\partial_+ D^2 \subset \partial D^2$ l'hémisphère supérieur* de $\partial D^2 = S^1$; soit $\hat{F}: (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{X}^0 \cup \mathcal{X}^1)$ une application continue telle que $F|_{X \times \partial D^2}$ soit lisse, et telle que $F|_{\partial D^2}$ soit transversale sur $\mathcal{X}^1$. On suppose que la restriction $F|_{X \times \partial_+ D^2}: X \times \partial_+ D^2 \rightarrow M$ est un plongement lisse. Alors $\hat{F}$ est homotope, rel. $\partial_+ D^2$ et à travers des applications dont la restriction à ∂D^2 est une application de ∂D^2 dans $\mathcal{X}^0 \cup \mathcal{X}^1$ lisse et transversale sur $\mathcal{X}^1$, à une application $\hat{G}$ telle que $G: X \times D^2 \rightarrow M$ soit un plongement lisse.

Remarque : Ce théorème n'est une conséquence directe de la position générale que si $2(i+2)+1 \leq n$, c'est-à-dire $n-2i \geq 5$.

3.1.3 Forme générique d'une application de D^2 dans $\mathcal{X}$

On notera $(x_1, \dots, x_i)$ des coordonnées locales dans X et $(y_1, \dots, y_n)$ des coordonnées locales dans M telles que les équations locales de Y soient $y_1 = \dots = y_i = 0$ (de telles coordonnées seront dites adaptées à Y). Une famille à 2 paramètres $\hat{F}: D^2 \rightarrow \mathcal{X}$ est identifiée à une application $F: X \times D^2 \rightarrow M$. On appelle indicatrice de la famille l'image réciproque $L \equiv F^{-1}(Y)$. Si F est différentiable et transversale sur Y , L est une sous-variété lisse de dimension 2 de $X \times D^2$. On dira que l'indicatrice est excellente pour la projection $p_2: X \times D^2 \rightarrow D^2$ si la restriction $p_2|_L: L \rightarrow D^2$ est générique au sens de Whitney (voir [31], et [19]). Les points singuliers de $p_2|_L$ sont alors de deux sortes : l'ensemble Σ^1 des points de L où $\text{rang } d(p_2|_L) = 1$ consiste en un nombre fini de courbes fermées non singulières ne s'intersectant pas, appelées "courbes de pli" (si une courbe de pli va jusqu'au bord de L , elle y arrive transversalement) ; les points de Σ^1 en lesquels $d(p_2|_L) = 0$ forment un sous-ensemble discret

* On notera dans la suite $\partial D^2 = \partial_+ D^2 \cup \partial_- D^2$ la décomposition de ∂D^2 en deux hémisphères.

$\Sigma^{1,1} \subset \text{int } \Sigma^1$, l'ensemble des "points-fronce" (l'image par p_2 d'un voisinage dans Σ^1 d'un point de $\Sigma^{1,1}$ présente un point de rebroussement (voir figure 1)).

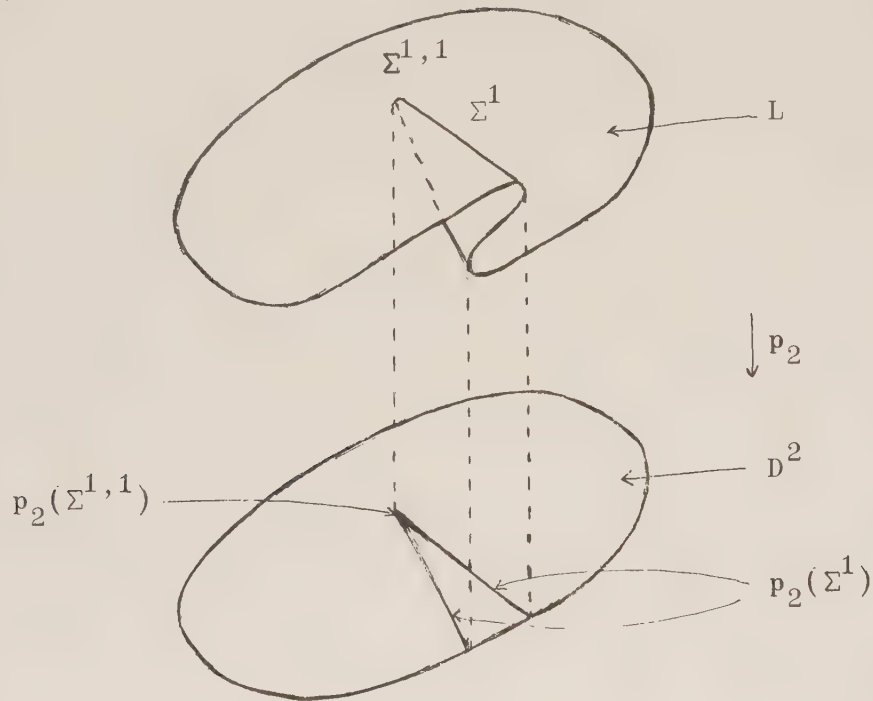


Figure 1

Nous avons énoncé ici les conditions de généricité "à la source" ; on impose en plus les conditions suivantes de généricité "au but" : les images par p_2 des courbes de pli ne présentent que des points doubles transversaux situés dans $\text{int } D^2$, et les valeurs de p_2 sur les points-fronce sont toutes distinctes entre elles et hors de $p_2(\Sigma^1 - \Sigma^{1,1})$. On peut voir sur les équations locales de Whitney que si $p_2|L : L \rightarrow D^2$ est générique, il en est de même de $p_2|\partial L = \partial L \rightarrow \partial D^2$.

3.1.4 Définition : On dit qu'une application $\hat{F} : D^2 \rightarrow \mathcal{X}$ est excellente si l'application $F : X \times D^2 \rightarrow M$ associée est différentiable, transversale sur Y , et si l'indicatrice $L \subset X \times D^2$ est une surface excellente pour la projection $p_2 : X \times D^2 \rightarrow D^2$.

3.1.5 Lemme : Toute application $\hat{F} : D^2 \rightarrow \mathcal{X}$ peut être approchée arbitrairement près (au sens C^0) par une application excellente.

Démonstration : Elle est formellement identique à celle du lemme 2 de ([4] chapitre I, paragraphe 5.1).

Remarquons que ce lemme admet un énoncé relatif ; on utilisera en particulier la forme relative dans le cas où la restriction de $\hat{F}$ à $\partial_+ D^2$ est excellente (c'est-à-dire lorsque la restriction $p_2|_{L \cap \partial_+ D^2} : L \cap \partial_+ D^2 \rightarrow \partial_+ D^2 \cong I$ est une fonction de Morse excellente) ; cela donne le

3.1.5b) Lemme : Si $\hat{F} : D^2 \rightarrow \mathcal{X}$ a une restriction $\hat{F}|_{\partial_+ D^2} : \partial_+ D^2 \rightarrow \mathcal{X}$ qui est une application excellente, $\hat{F}$ peut être approchée arbitrairement près au sens C^0 , à travers des applications fixes sur $\partial_+ D^2$ et dont la restriction à ∂D^2 est transversale sur $\mathcal{X}^1$, par une application excellente.

3.1.6 Nous allons maintenant étudier individuellement les éléments de $\mathcal{X}$ que peut rencontrer une application excellente $\hat{F} : D^2 \rightarrow \mathcal{X}$. Soit $(x_0, \alpha_0) \in L \subset X \times D^2$ un point de l'indicatrice ; trois cas sont possibles :
 (i) (x_0, α_0) est un point régulier de la projection $p_2|_L : L \rightarrow D^2$. Nous allons montrer que dans ce cas $F_{\alpha_0} \equiv F|_{X \times \{\alpha_0\}}$ est un plongement de X dans M transversal sur Y au point x_0 . Pour cela, écrivons au voisinage de (x_0, α_0) l'application F sous la forme $F : \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i}$
 $F(x, \alpha) = (f_1(x, \alpha), \dots, f_n(x, \alpha))$, avec
 $x = (x_1, \dots, x_i)$, $\alpha = (u, v)$; $L = F^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-i})$ a pour équations
 $f_1(x, \alpha) = \dots = f_i(x, \alpha) = 0$. Un vecteur $(x', \alpha') \in \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^2$ tangent au point (x_0, α_0) à L est défini par les équations

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial u} & \frac{\partial f_i}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où toutes les dérivées sont prises au point (x_0, α_0) .

$$A(x, \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \delta_{F\alpha}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \delta_{F\alpha}}{\partial x_i} \end{pmatrix}, \quad B(x, \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial u} & \frac{\partial f_i}{\partial v} \\ \frac{\partial \delta_{F\alpha}}{\partial u} & \frac{\partial \delta_{F\alpha}}{\partial v} \end{pmatrix},$$

toutes les dérivées étant prises au point (x, α) .

En écrivant que si $x' \neq 0$, le vecteur $(x', 0)$ n'est pas tangent à Σ^1 au point (x_0, α_0) , on voit qu'un point $(x_0, \alpha_0) \in \Sigma^1 - \Sigma^{1,1}$ est caractérisé par

$$(1) \quad \delta_{F\alpha_0}(x_0) = 0$$

(2) La dérivée première de $(f_1(x, \alpha_0), \dots, f_i(x, \alpha_0), \delta_{F\alpha_0}(x))$ par rapport à $(x_1, \dots, x_i)$ est de rang i en x_0 .

Remarquons que le fait que la dérivée première de $(f_1(x, \alpha_0), \dots, f_i(x, \alpha_0))$ par rapport à $(x_1, \dots, x_i)$ est de rang $i-1$ en x_0 est une conséquence de (2).

On dit que $F_{\alpha_0}: X \rightarrow M$ a au point x_0 un contact d'ordre 1 avec Y .

(iii) (x_0, α_0) est un point de $\Sigma^{1,1}$:

D'après ce qui précède, on doit avoir en un tel point

(1') La dérivée première de $(f_1(x, \alpha_0), \dots, f_i(x, \alpha_0))$ par rapport à $(x_1, \dots, x_i)$ est de rang $i-1$ en x_0 .

(2') La dérivée première de $(f_1(x, \alpha_0), \dots, f_i(x, \alpha_0), \delta_{F\alpha_0}(x))$ par rapport à $(x_1, \dots, x_i)$ est de rang $i-1$ en x_0 .

Il faut ajouter à ces conditions une condition de non dégénérescence du jet d'ordre 2, traduisant le fait que (x_0, α_0) est un point-fronce de L : utilisons la caractérisation que donne Whitney du point-fronce (voir [31], § 4) ; soit $\varphi(t) = (x(t), \alpha(t))$ une paramétrisation C^2 de la courbe lisse

Σ^1 au voisinage du point $\varphi(0) = (x_0, \alpha_0)$. En (ii) nous aurions pu caractériser un point-p pli (x_0, α_0) par la condition $\frac{d(p_2 \circ \varphi)}{dt}(0) \neq 0$, c'est-à-dire $\frac{d\alpha}{dt}(0) \neq 0$, qui équivaut à $\text{Ker}(dp_2|_{\Sigma^1(x_0, \alpha_0)}) = 0$. Pour un point-fronce, on écrit $\frac{d(p_2 \circ \varphi)}{dt}(0) = 0$, ce qui correspond à (2'), et $\frac{d^2(p_2 \circ \varphi)}{dt^2}(0) \neq 0$ qui est la troisième condition annoncée. Cette condition peut encore s'écrire de la manière suivante :

Soit $\Theta: \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^i \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{i+1}$ l'application définie par $\Theta(x, \alpha, x', \alpha') = (f_1(x, \alpha), \dots, f_i(x, \alpha), \delta_{F\alpha}(x), A(x, \alpha) \cdot x' + B(x, \alpha) \cdot \alpha')$ où $A(x, \alpha)$ et $B(x, \alpha)$ ont été définies précédemment. Il est clair que $\Theta^{-1}(0)$ est le plongement naturel dans $\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^2$ du fibré tangent de $\Sigma^1 \subset \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^2$. Un vecteur $(X, Y, X', Y') \in \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^2$ est tangent à ce fibré au point (x, α, x', α') si et seulement si il vérifie les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad A(x, \alpha) \cdot X + B(x, \alpha) \cdot Y = 0 \\ (b) \quad \frac{\partial A(x, \alpha) \cdot x'}{\partial x} \cdot X + \frac{\partial B(x, \alpha) \cdot \alpha'}{\partial x} \cdot X + \frac{\partial A(x, \alpha) \cdot x'}{\partial \alpha} \cdot Y + \frac{\partial B(x, \alpha) \cdot \alpha'}{\partial \alpha} \cdot Y \\ \quad + A(x, \alpha) \cdot X' + B(x, \alpha) \cdot Y' = 0 \end{array} \right.$$

Remarquons que (a) dit que (X, Y) est tangent à Σ^1 au point (x, α) , donc (X, Y) est proportionnel à (x', α') . Plaçons-nous en un point $(x_0, \alpha_0, x'_0, \alpha'_0)$ tel que $(x_0, \alpha_0) \in \Sigma^{1,1}$. Dans ce cas $\alpha'_0 = 0$, et donc $Y = 0$. On peut supposer $X = x'_0$. La condition $\frac{d^2(p_2 \circ \varphi)}{dt^2}(0) \neq 0$ signifie que si un vecteur $(x'_0, 0, X', Y')$ est tangent à $\Theta^{-1}(0)$ au point $(x_0, \alpha_0, x'_0, 0)$, alors $Y' \neq 0$, ce qui s'écrit encore

$$(3') \quad \text{Le vecteur } \frac{\partial A(x_0, \alpha_0)}{\partial x} \cdot x_0'^2 \in \mathbb{R}^{i+1} \text{ n'appartient pas à l'image de } A(x_0, \alpha_0). \\ (x'_0 \text{ étant défini à une constante près par } A(x_0, \alpha_0) \cdot x'_0 = 0).$$

♦

La notation $\frac{\partial A(x, \alpha_0)}{\partial x} \cdot x'^2$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^{i+1}$ image de (x', x') par $\frac{\partial A(x, \alpha_0)}{\partial x} \in L_s(\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^i, \mathbb{R}^{i+1})$.

Si les conditions (1'), (2'), (3') sont vérifiées, on dira que $F_{\alpha_0} : X \rightarrow M$ a, au point x_0 , un contact d'ordre 2 avec Y . Nous aurons besoin d'étudier le cas particulier où $F_{\alpha_0}(x_1, \dots, x_i) = (f_1(x_1), x_2, \dots, x_i, 0, \dots, 0, x_1)$.

$$\text{Ici} \quad \delta_{F_{\alpha_0}} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \text{et} \quad A(x, \alpha_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

En particulier, si $(0, \alpha_0) \in \Sigma^{1,1}$, on a $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(0) = 0$, et on peut choisir $x'_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Pour que $(0, \alpha_0)$ corresponde à un vrai "point-fronte" de L , il faut vérifier (3'), c'est-à-dire: le vecteur $(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(0), 0, \dots, 0, \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^3}(0))$ n'appartient pas à l'image de $A(0, \alpha_0)$, ou encore $\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^3}(0) \neq 0$.

Donnons maintenant les formes canoniques de plongements de X dans M ayant avec Y un contact d'ordre 1 ou 2 (le cas du contact d'ordre 1 se trouve dans [4]).

3.1.7 Lemme : Si un plongement $f : X \rightarrow M$ a en x_0 un contact d'ordre 1 (resp. 2) avec Y , il existe des coordonnées locales au voisinage de x_0 et des coordonnées locales adaptées à Y au voisinage de $f(x_0)$ par rapport auxquelles f s'écrit

$f(x_1, \dots, x_i) = (x_1^2, x_2, \dots, x_i, 0, \dots, 0, x_1)$ dans le cas du contact d'ordre 1, et

$f(x_1, \dots, x_i) = (x_1^3, x_2, \dots, x_i, 0, \dots, 0, x_1)$ dans le cas du contact d'ordre 2.

Rappelons que $(y_1, \dots, y_n)$ est un système de coordonnées adapté à Y si Y s'écrit localement $y_1 = \dots = y_i = 0$. On prendra $x_0 = (0, \dots, 0)$.

Démonstration : Dans les deux cas, on peut supposer que le rang de la dérivée première en 0 de $(f_2, \dots, f_i, f_n)$ par rapport à $(x_1, \dots, x_i)$ est égal à i ; on en déduit que l'application $(f_2, \dots, f_i, f_n)$ est un difféomorphisme local de $(\mathbb{R}^i, 0)$ dans $(\mathbb{R}^i, 0)$. A l'aide du difféomorphisme inverse, on définit un difféomorphisme local Φ de $\mathbb{R}^i$ tel que $f\Phi: \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}^n$ s'écrive :

$$f\Phi(x) = (f_1(x), x_2, \dots, x_i, f_{i+1}(x), \dots, f_{n-1}(x), x_1) .$$

On considère alors le difféomorphisme local Ψ de $\mathbb{R}^n$ défini par les formules

$$\Psi(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_i, y_{i+1} - f_{i+1}(y_n, y_2, \dots, y_i), \dots, y_{n-1} - f_{n-1}(y_n, y_2, \dots, y_i), y_n)$$

On remarque que Ψ conserve Y , et que

$$\Psi f \Phi(x) = (f_1(x), x_2, \dots, x_i, 0, \dots, 0, x_1) .$$

Montrons maintenant qu'on peut supposer que f_1 ne dépend que de x_1 ; on considère à cette effet l'application locale $\Theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\Theta(y_1, \dots, y_n) = (\alpha(y_1, \dots, y_n), y_2, \dots, y_n)$, où

$$\alpha(y_1, \dots, y_n) = y_1 - f_1(y_n, y_2, \dots, y_i) + f_1(y_n, 0, \dots, 0) .$$

On a $\frac{\partial \alpha}{\partial y_1}(0) = 1$, donc Θ est un difféomorphisme local. De plus, Θ conserve Y , car

$$\Theta(0, \dots, 0, y_{i+1}, \dots, y_n) = (\alpha(0, \dots, 0, y_{i+1}, \dots, y_n), 0, \dots, 0, y_{i+1}, \dots, y_n)$$

et
$$\alpha(0, \dots, 0, y_{i+1}, \dots, y_n) = -f_1(y_n, 0, \dots, 0) + f_1(y_n, 0, \dots, 0) = 0 .$$

Enfin, on a

$$\Theta \Psi f \Phi(x) = (f_1(x_1, 0, \dots, 0), x_2, \dots, x_i, 0, \dots, 0, x_1) .$$

Remarquons que sous cette forme, $\delta_f(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)$.

Dans le cas du contact d'ordre 1, les conditions sont $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) = 0$ et

$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(0) \neq 0$. Il est clair qu'un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ va transformer $f_1(x_1)$ en la fonction x_1^2 ; si on fait agir le même difféomorphisme sur l'axe des y_n , on trouve la forme annoncée

$$f(x_1, \dots, x_i) = (x_1^2, x_2, \dots, x_i, 0, \dots, 0, x_1) \quad .$$

Dans le cas du contact d'ordre 2, les conditions sont $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(0) = 0$,

$\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^3}(0) \neq 0$. Le 3-jet en 0 de $(x_1 \mapsto x_1^3)$ étant suffisant (ce qui signifie

que x_1^3 est stable sous des perturbations d'ordre supérieur ou égal à 4) on peut comme précédemment trouver un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ qui transforme $f_1(x_1)$ en x_1^3 ; si on fait agir le même difféomorphisme sur l'axe des y_n , on trouve la forme annoncée

$$f(x_1, \dots, x_i) = (x_1^3, x_2, \dots, x_i, 0, \dots, 0, x_1) \quad , \quad \underline{\text{cqfd.}}$$

3.1.8 Stratification de $\mathcal{X}$ définie par Y ; familles élémentaires à 1 et 2 paramètres :

Nous avons vu qu'une application générique de D^2 dans $\mathcal{X}$ a son image contenue dans la réunion des trois sous-espaces $\mathcal{X}^0$, $\mathcal{X}^1$, $\mathcal{X}^2$ de $\mathcal{X}$ définis de la manière suivante :

$\mathcal{X}^0$ est l'ensemble des plongements de X dans M dont l'image est transversale sur Y_0 ,

$\mathcal{X}^1$ est l'ensemble des plongements dont l'image est transversale sur Y_0 partout sauf en un point où il y a contact d'ordre 1,

$\mathcal{X}^2 = \mathcal{X}_\alpha^2 \cup \mathcal{X}_\beta^2$, où $\mathcal{X}_\alpha^2$ est l'ensemble des plongements dont l'image est transversale sur Y_0 partout sauf en un point où il y a contact d'ordre 2, et $\mathcal{X}_\beta^2$ est l'ensemble des plongements dont l'image est transversale sur Y_0 partout sauf en deux points où il y a contact d'ordre 1.

Pour montrer que $\mathcal{X}^0, \mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2$ est une bonne stratification de $\mathcal{X}^0 \cup \mathcal{X}^1 \cup \mathcal{X}^2$ on suit le même plan que ([4], chapitre I, paragraphe 5.2), ce qui nous amène à rappeler la définition des chemins élémentaires de traversée de $\mathcal{X}^1$ (appelés par Cerf chemins de Whitney) et à définir des familles élémentaires à 2 paramètres de traversée de $\mathcal{X}_\alpha^2$ et $\mathcal{X}_\beta^2$.

Soit ω une fonction en cloche de $\mathbb{R}^i$ dans I à support contenu dans $D^1 \times D^{i-1}$, égale à 1 au voisinage de 0, et soit $\varepsilon > 0$.

Pour tout $t \in I$ on définit un plongement l_t de $D^1 \times D^{i-1}$ dans $D^1 \times D^{i-1} \times D^{n-i-1} \times D^1$ par

$$l_t(x_1, \dots, x_i) = (x_1^2 + \varepsilon \omega(x)(t - \frac{1}{2}); x_2, \dots, x_i, 0, \dots, 0, x_1) \quad .$$

De même, pour tout $(u, v) \in I^2$ on définit un plongement $k_{(u,v)}$ de $D^1 \times D^{i-1}$ dans $D^1 \times D^{i-1} \times D^{n-i-2} \times D^1 \times D^1$ par

$$k_{(u,v)}(x_1, \dots, x_i) = (x_1^3 + \varepsilon \omega(x)[(u - \frac{1}{2})x + (v - \frac{1}{2})]; x_2, \dots, x_i, 0, \dots, 0, \varepsilon \omega(x)(u - \frac{1}{2}), x_1) \quad .$$

L'étude de l_t étant faite par Cerf, contentons-nous d'examiner $k_{(u,v)}$: sur le complémentaire du support de ω , $k_{(u,v)}$ coïncide avec $k_{(1/2, 1/2)}$, donc son image ne rencontre pas $\{0\} \times \{0\} \times \overline{D^{n-i-2} \times D^1 \times D^1}$; en fait, si ε est assez petit, il en est de même sur $\omega^{-1}(]0, 1[)$. Sur $\omega^{-1}(1)$, on a $\delta_{k_{(u,v)}}(x_1, \dots, x_i) = 3x_1^2 + \varepsilon(u - \frac{1}{2})$, et on voit facilement que $(x_1, \dots, x_i)$ est un point de contact d'ordre 1 de $k_{(u,v)}$ si et seulement si on a :

$$\begin{cases} x_1^3 + \varepsilon[(u - \frac{1}{2})x + (v - \frac{1}{2})] = x_2 = \dots = x_i = 0 \\ 3x_1^2 + \varepsilon(u - \frac{1}{2}) = 0 \\ x_1 \neq 0 \end{cases}$$

et un point de contact d'ordre 2 de $k_{(u,v)}$ si et seulement si

$$x_1 = x_2 = \dots = x_i = 0 \quad , \quad u = v = \frac{1}{2} \quad .$$

La trace sur le plan (u,v) de la stratification de l'espace $\text{Plgt}(D^1 \times D^{i-1}, D^1 \times D^{i-1} \times D^{n-i-2} \times D^1 \times D^1)$ définie par $\{0\} \times \{0\} \times D^{n-i-2} \times D^1 \times D^1$ est donc le cusp d'équations

$$\begin{cases} \varepsilon(u - \frac{1}{2}) = -3x_1^2 \\ \varepsilon(v - \frac{1}{2}) = 2x_1^3 \end{cases}.$$

3.1.9 Définition : Un chemin F_t dans $\mathcal{X}$ est appelé chemin élémentaire de traversée de $\mathcal{X}^1$ s'il existe un plongement $\bar{\Phi} : D^1 \times D^{i-1} \rightarrow X$ et un plongement $\bar{\Phi}' : D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \rightarrow M$ adapté à Y (c'est-à-dire tel que $Y \cap (\text{image } \bar{\Phi}') = \bar{\Phi}'(\{0\} \times \{0\} \times D^1)$) tels que l'un des deux diagrammes ci-dessous soit commutatif pour tout $t \in I$

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} D^1 \times D^{i-1} & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & X \\ \downarrow l_t & & \downarrow F_t \\ D^1 \times D^{i-1} \times D^1 & \xrightarrow{\bar{\Phi}'} & M \end{array} \quad (1') \quad \begin{array}{c} \text{idem avec } l_{1-t} \text{ au} \\ \text{lieu de } l_t \end{array}$$

et si de plus F_t est indépendant de t sur le complémentaire de l'image de $\bar{\Phi}$. Dans le cas (1) (resp. (1')) on dit que F_t est un chemin élémentaire de suppression (resp. d'apparition).

3.1.10 Définition : Une famille à 2 paramètres F_{uv} d'éléments de $\mathcal{X}$ est appelée famille élémentaire de traversée de $\mathcal{X}^2_\alpha$ s'il existe un plongement $\bar{\Phi} : D^1 \times D^{i-1} \rightarrow X$ et un plongement $\bar{\Phi}' : D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \times D^1 \rightarrow M$, adapté à Y (c'est-à-dire tel que $Y \cap (\text{image } \bar{\Phi}') = \bar{\Phi}'(\{0\} \times \{0\} \times D^1 \times D^1)$) tels que pour tout $(u,v) \in I^2$ l'un des deux diagrammes ci-dessous soit commutatif

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} D^1 \times D^{i-1} & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & X \\ \downarrow k_{u,v} & & \downarrow F_{uv} \\ D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \times D^1 & \xrightarrow{\bar{\Phi}'} & M \end{array} \quad (2') \quad \begin{array}{c} \text{idem avec } k_{1-u,v} \text{ au} \\ \text{lieu de } k_{u,v} \end{array}$$

et si de plus F_{uv} est indépendant de (u,v) sur le complémentaire de l'image de Φ .

3.1.11 Définition : Une famille à 2 paramètres F_{uv} dans $\mathcal{X}$ est appelée famille élémentaire de traversée de $\mathcal{X}_\beta^2$ si $F_{u,0}$ et $F_{0,v}$ sont des chemins élémentaires de traversée de $\mathcal{X}^1$ respectivement associés aux plongements (Φ_1, Φ_1') et (Φ_2, Φ_2') avec $\text{Image}(\Phi_1) \cap \text{Image}(\Phi_2) = \emptyset$, $\text{Image}(\Phi_1') \cap \text{Image}(\Phi_2') = \emptyset$, et si $F_{u,v}(x)$ est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{u,v}(x) = F_{1/2,1/2}(x) \text{ si } x \notin \text{Image}(\Phi_1) \cup \text{Image}(\Phi_2) \\ F_{u,v}(x) = \Phi_1' \circ k_{u,v} \circ \Phi_1^{-1}(x) \text{ si } x \in \text{Image}(\Phi_1) \\ F_{u,v}(x) = \Phi_2' \circ k_{u,v} \circ \Phi_2^{-1}(x) \text{ si } x \in \text{Image}(\Phi_2) . \end{array} \right.$$

On se permet bien sûr, dans cette définition, de remplacer $F_{u,0}$ et $F_{0,v}$ par $F_{1-u,0}$ et $F_{0,1-v}$, ce qui donne trois cas différents. On appellera $F_{0,0}$ l'origine de la famille.

Dans les trois définitions qui précèdent, la déformation de l'image de X dans M est localisée au voisinage d'un complexe de dimension 2 ou 3 qu'on appelle "âme de la déformation".

3.1.12 Lemme : $\mathcal{X}^0, \mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2$ est une stratification localement triviale de codimension 2 de $\mathcal{X}^0 \cup \mathcal{X}^1 \cup \mathcal{X}^2$. Plus précisément, $\mathcal{X}^1$ est une sous-variété de codimension 1 de $\mathcal{X}^0 \cup \mathcal{X}^1$, et $\mathcal{X}^2$ admet pour modèle transverse un disque ouvert D^2 stratifié comme sur la figure 2 :

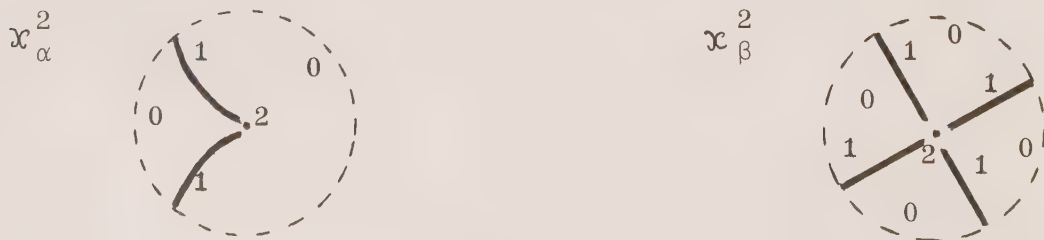


Figure 2

Pour la définition d'une stratification localement triviale, voir le chapitre 1 et [4] chapitre I, paragraphe 1.2.

Démonstration : L'assertion concernant $\mathcal{X}^1$ est démontrée par Cerf ([4], chap. I, § 5.2, lemme 3). La démonstration pour $\mathcal{X}_\alpha^2$ est formellement identique : à condition de remplacer l_t par $k_{u,v}$ et "sommet de courbe indicatrice" par "point-fronce de la surface indicatrice", on montre que si $\mathcal{V}$ est un petit voisinage de h dans $\mathcal{X}_\alpha^2$, et si $A: \mathcal{V} \times I^2 \rightarrow \mathcal{X}$ est définie par $A(h', u, v) = h' - h + k_{u,v}$, A est un homéomorphisme de $\mathcal{V} \times I^2$ sur un voisinage de h dans $\mathcal{X}$.
L'assertion pour $\mathcal{X}_\beta^2$ se déduit trivialement de celle pour $\mathcal{X}^1$.

3.1.13 Définition : Une famille générique à k paramètres d'éléments de $\mathcal{X}$ ($k=1,2$) est appelée famille de traversée de $\mathcal{X}^1$ ($k=1$) (resp. famille de traversée de $\mathcal{X}_\alpha^2$ ($k=2$), resp. famille de traversée de $\mathcal{X}_\beta^2$ ($k=2$)), si l'image réciproque sur I^k de la stratification de $\mathcal{X}$ est isomorphe au modèle transverse de $\mathcal{X}^1$, resp. $\mathcal{X}_\alpha^2$, resp. $\mathcal{X}_\beta^2$.

3.1.14 Lemme :

(1) Pour tout $h \in \mathcal{X}^0$, tout chemin de traversée de $\mathcal{X}^1$ d'origine h est homotope (dans l'espace des chemins de traversée de $\mathcal{X}^1$ issus de h) à un chemin élémentaire de traversée de $\mathcal{X}^1$.

(2) Pour tout $h \in \mathcal{X}^0$, toute famille à 1 paramètre de chemins de traversée de $\mathcal{X}^1$ d'origine h , dont les extrémités sont des chemins élémentaires de traversée de $\mathcal{X}^1$, est homotope rel. ses extrémités (dans l'espace des chemins de traversée de $\mathcal{X}^1$ issus de h) à une famille à 1 paramètre de chemins élémentaires de traversée de $\mathcal{X}^1$.

(3) Pour tout $h \in \mathcal{X}$, toute famille à 2 paramètres de traversée de $\mathcal{X}_\alpha^2$ (resp. $\mathcal{X}_\beta^2$) d'origine h est homotope (dans l'espace des familles du même type d'origine h) à une famille élémentaire à 2 paramètres de traversée de $\mathcal{X}_\alpha^2$ (resp. $\mathcal{X}_\beta^2$).

Démonstration : Le (1) a été démontré par Cerf dans [4].

Pour le (2), il faut définir ce que l'on entend par famille à 1 paramètre de chemins élémentaires de traversée de $\mathcal{X}^1$ d'origine h : c'est une famille à 2 paramètres F_{st} de plongements de X dans M telle qu'il existe un diagramme commutatif pour tout $t \in I$ (on se permet bien entendu de remplacer 1_t par 1_{1-t} comme dans la définition 3.1.9) :

$$\begin{array}{ccc}
 D^1 \times D^{i-1} \times I & \xrightarrow{\mathfrak{G}} & X \times I \\
 \downarrow 1_t \times \text{id}_I & & \downarrow \mathfrak{F}_t \\
 D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \times I & \xrightarrow{\mathfrak{G}'} & M \times I
 \end{array}
 \quad \text{où} \quad
 \begin{aligned}
 \mathfrak{F}_t(x, s) &= (F_{st}(x), s) \\
 \mathfrak{G}(x, s) &= (\mathfrak{G}_s(x), s) \\
 \mathfrak{G}'(x, s) &= (\mathfrak{G}'_s(x), s)
 \end{aligned}$$

avec en plus les conditions :

- (i) pour tout $s \in I$, $F_{st} = F_{so}$ sur le complémentaire de l'image de $\mathfrak{G}|_{D^1 \times D^{i-1} \times \{s\}}$
- (ii) pour tout $s \in I$, $F_{so} = h$.

Soit $\mathcal{E}^1_h$ l'espace topologique (muni de la topologie compacte-ouverte) des chemins élémentaires de traversée de $\mathcal{X}^1$ d'origine h ; soit $\mathcal{J}(\mathcal{E}^1_h)$ le complexe singulier de $\mathcal{E}^1_h$.

Soit $\mathcal{P}_h \subset \text{Plgt}(D^1 \times D^{i-1}, X) \times \text{Plgt}_Y(D^1 \times D^{i-1} \times D^1, M)$ l'ensemble des couples (Φ, Φ') tels que $h\Phi = \Phi'1_0$ (les espaces de plongements sont munis de la topologie C^∞ , et l'indice Y désigne le sous-espace des plongements Φ' adaptés à Y (voir définition 3.1.9)) ; on note $\mathcal{J}(\mathcal{P}_h)$ le complexe singulier de $\mathcal{P}_h$; soit $\pi : \mathcal{P}_h \rightarrow \mathcal{E}^1_h$ l'application continue définie par $\pi(\Phi, \Phi') = \{F_t \mid t \in I\}$, où

$$\begin{cases}
 F_t = h \text{ sur le complémentaire de l'image de } \Phi \\
 F_t \Phi(z) = \Phi'1_t(z) \text{ pour tout } t \in I \\
 F_0 \equiv h.
 \end{cases}$$

(il existe bien sûr une définition analogue en remplaçant 1_t par 1_{1-t}).

On voit qu'une famille à 1 paramètre de chemins élémentaires de traversée de $\mathfrak{X}^1$ d'origine h n'est autre qu'un 1-simplexe du sous-complexe $\widetilde{\mathcal{E}l}_h$ de $\mathcal{J}(\mathcal{E}l_h)$ image de $\mathcal{J}(\mathcal{P}_h)$ par l'application $\mathcal{J}(\pi) : \mathcal{J}(\mathcal{P}_h) \rightarrow \mathcal{J}(\mathcal{E}l_h)$.

Soit $\mathcal{P}'_h$ l'ensemble des couples $(\Phi, \hat{\Phi}')$ tels qu'il existe $(\Phi, \Phi') \in \mathcal{P}_h$ avec $\hat{\Phi}' = \Phi' \big|_{\bigcup_{t \in I} l_t} (D^1 \times D^{i-1}) : \bigcup_{t \in I} l_t (D^1 \times D^{i-1}) \rightarrow M$; la restriction $\mathcal{P}_h \rightarrow \mathcal{P}'_h$ est une fibration de fibre acyclique, et l'application π se factorise à travers une application $\pi' : \mathcal{P}'_h \rightarrow \mathcal{E}l_h$.

Remarquons de plus que, dans la définition de l_t , on pouvait supposer que support $\omega = D^1 \times D^{i-1}$ en écrivant par exemple

$\omega(x_1, x_2, \dots, x_i) = \omega_1(x_1) \times \omega_2(x_2, \dots, x_i)$ avec support $\omega_1 = D^1$ et support $\omega_2 = D^{i-1}$.

Supposons que deux éléments $(\Phi, \hat{\Phi}')$ et $(\Psi, \hat{\Psi}')$ de $\mathcal{P}'_h$ définissent le même élément $\gamma \equiv \{F_t \mid t \in I\} \in \mathcal{E}l_h$. Par le choix de la fonction ω , on a $\text{Im } \Phi = \text{Im } \Psi$ (support de la déformation), ce qui permet de définir un difféomorphisme $\Theta = \Psi^{-1} \Phi : D^1 \times D^{i-1} \rightarrow D^1 \times D^{i-1}$. On a $\hat{\Psi}' \big|_{l_t} \Theta = \hat{\Phi}' \big|_{l_t}$ pour tout $t \in I$, ce qui montre que la donnée de $\hat{\Psi}'$ et celle de Θ détermine $\hat{\Phi}'$; on a donc une action sur $\pi'^{-1}(\gamma) \subset \mathcal{P}'_h$ de certains éléments $\Theta \in \text{Diff}(D^1 \times D^{i-1})$; précisons les contraintes qui existent pour Θ :

Considérons, pour $0 \leq t < \frac{1}{2}$, l'image par Θ du point $x = (x_1^\pm(t), 0, \dots, 0) \in D^1 \times D^{i-1}$, où $x_1^\pm(t) = \pm \sqrt{-\varepsilon \omega(x)}(t - \frac{1}{2})$; si on pose $\Theta(x) = y = (y_1, \dots, y_i)$, on a

$$\hat{\Psi}' \big|_{l_t} \Theta(x) = \hat{\Psi}'(y_1^2 + \varepsilon \omega(y)(t - \frac{1}{2}), y_2, \dots, y_i, y_1) = \hat{\Phi}' \big|_{l_t}(x) = \hat{\Phi}'(0, 0, \dots, 0, x_1^\pm(t)) \in Y.$$

On en déduit que $y_1^2 + \varepsilon \omega(y)(t - \frac{1}{2}) = y_2 = \dots = y_i = 0$, puisque $\hat{\Psi}'$ est la restriction d'un plongement Ψ' adapté à Y .

Si on a choisi ε assez petit pour que $\omega(a, 0, \dots, 0) = 1$ dès que $|a| \leq \varepsilon$, on trouve que $y_1 = \pm \sqrt{-\varepsilon}(t - \frac{1}{2})$ et $x_1 = \pm \sqrt{-\varepsilon}(t - \frac{1}{2})$. La restriction au segment $[-\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, +\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}] \times \{0\} \subset D^1 \times D^{i-1}$ du difféomorphisme Θ est donc l'identité ou la symétrie par rapport à l'origine.

Réciproquement, si $(\hat{\Phi}, \hat{\Phi}') \in \pi'^{-1}(\gamma) \subset \mathcal{P}'_h$, et si $(\hat{\Psi}, \hat{\Psi}')$ est obtenu à partir de $(\hat{\Phi}, \hat{\Phi}')$ en faisant agir comme précédemment un difféomorphisme $\textcircled{u}$ de $D^1 \times D^{i-1}$ ayant la propriété ci-dessus, on vérifie que $(\hat{\Psi}, \hat{\Psi}') \in \pi'^{-1}(\gamma)$.

Le sous-groupe $G \subset \text{Diff}(D^1 \times D^{i-1})$ formé des difféomorphismes qui sont l'identité ou la symétrie par rapport à l'origine sur le segment $[-\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, +\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}] \times \{0\} \subset D^1 \times D^{i-1}$ opère donc simplement transitivement, par l'intermédiaire de son complexe singulier $\mathcal{J}(G)$, sur les fibres de l'application $\mathcal{J}(\pi') : \mathcal{J}(\mathcal{P}'_h) \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}}\mathcal{L}_h$. On en déduit que $\widetilde{\mathcal{E}}\mathcal{L}_h$ est un complexe de Kan et que $\mathcal{J}(\pi')$ est une fibration de Kan (voir [32]). Par composition avec la fibration de Kan de $\mathcal{J}(\mathcal{P}_h)$ sur $\mathcal{J}(\mathcal{P}'_h)$ induite par la restriction, on en déduit que :

$$\mathcal{J}(\pi) : \mathcal{J}(\mathcal{P}_h) \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}}\mathcal{L}_h \text{ est une fibration de Kan.}$$

D'autre part, soit $\mathcal{Q}$ le groupe produit de $\text{Diff } X$ par le groupe des difféomorphismes de M laissant stable Y . $\mathcal{Q}$ opère dans $\mathcal{X}$ en laissant invariante la famille des chemins élémentaires de traversée de $\mathcal{X}^1$, et vérifie les conditions (a_0) et (a_1) du lemme des chemins élémentaires (voir chapitre 1, paragraphe 1.2, ou [4] chapitre I, paragraphe 2.2). Pour la condition (a_0) , Cerf remarque dans [4] chapitre I, paragraphe 5.2, démonstration du lemme 3) que c'est une conséquence des théorèmes de fibration ; pour la condition (a_1) , il faut en plus un lemme local au voisinage du point de contact avec Y ; on commence par se ramener au cas où le point de contact est fixé, puis on remarque que, compte-tenu de la stabilité de la fonction $x \mapsto x^2$, la mise sous forme canonique utilisée pour démontrer le lemme 3.1.7 dépend localement continûment de l'élément de $\mathcal{X}^1$ considéré.

On déduit alors du lemme des chemins élémentaires que pour démontrer le (2) du lemme 3.1.14, il suffit de démontrer le

3.1.15 Lemme : Le complexe de Kan $\widetilde{\mathcal{E}}\mathcal{L}_f$, défini de manière analogue à $\widetilde{\mathcal{E}}\mathcal{L}_h$ mais ayant pour 0-squelette l'ensemble des chemins élémentaires traversant $\mathcal{X}^1$ en un point donné f , est connexe.

Démonstration : Un chemin élémentaire de traversée de $\mathcal{X}^1$ au point f est déterminé par un couple $(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}')$ de plongements rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D^1 \times D^{i-1} & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & X \\ \downarrow l_{1/2} & & \downarrow f \\ D^1 \times D^{i-1} \times D^1 & \xrightarrow{\bar{\Phi}'} & M \end{array}$$

Si on définit, pour $0 < \lambda \leq 1$, des plongements

$$\rho_\lambda : D^1 \times D^{i-1} \rightarrow D^1 \times D^{i-1} \quad \text{et} \quad \rho'_\lambda : D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \rightarrow D^1 \times D^{i-1} \times D^1$$

par les formules

$$\rho_\lambda(x_1, \dots, x_i) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_i) \quad \text{et} \quad \rho'_\lambda(y_1, y_2, \dots, y_i, y_n) = (\lambda^2 y_1, \lambda y_2, \dots, \lambda y_i, \lambda y_n)$$

on vérifie que, pour tout λ , on a $l_{1/2} \rho_\lambda = \rho'_\lambda l_{1/2}$.

On en déduit que tout chemin élémentaire de traversée de $\mathcal{X}^1$ en f est homotope (au sens du complexe de Kan $\tilde{\mathcal{E}l}_f$) à un chemin élémentaire défini par un couple $(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}')$ tel que l'image de $\bar{\Phi}$ (resp. l'image de $\bar{\Phi}'$) soit contenue dans un voisinage arbitrairement petit dans X (resp. dans M) du point de contact.

Supposons maintenant que $(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}')$ et (Ψ, Ψ') définissent deux chemins élémentaires traversant $\mathcal{X}^1$ en f . L'argument ci-dessus permet de se ramener au cas où $\text{Im } \bar{\Phi} \subset \text{int}(\text{Im } \Psi)$, et $\text{Im } \bar{\Phi}' \subset \text{int}(\text{Im } \Psi')$, $\tilde{\Psi}'$ étant un plongement de $D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \times D^{n-i-1}$ dans M qui prolonge Ψ' et qui est adapté à Y , ce qui signifie $\Psi' = \tilde{\Psi}'|_{D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \times \{0\}}$, et $(\text{Im } \tilde{\Psi}') \cap Y = \tilde{\Psi}'(\{0\} \times \{0\} \times D^1 \times D^{n-i-1})$.

Si on définit $(\bar{\Theta}, \bar{\Theta}')$ par $\bar{\Theta} = \Psi^{-1} \bar{\Phi}$ et $\bar{\Theta}' = \tilde{\Psi}'^{-1} \bar{\Phi}'$, le diagramme suivant est commutatif :

Posons $\widetilde{\mathcal{G}} = (\widetilde{\mathcal{G}}_1, \dots, \widetilde{\mathcal{G}}_i)$ et $\widetilde{\mathcal{G}}' = (\widetilde{\mathcal{G}}'_1, \dots, \widetilde{\mathcal{G}}'_i, \widetilde{\mathcal{G}}'_n, \widetilde{\mathcal{G}}'_{i+1}, \dots, \widetilde{\mathcal{G}}'_{n-1})$; il vient :

ce qui montre que $\widetilde{(\mathfrak{U})'}$ détermine $(\mathfrak{U})$; d'autre part on a

Réciproquement, soit $\widetilde{\Theta}'$ un plongement vérifiant (B), et définissons Θ par les formules (A) ; si (Ψ, Ψ') définit un chemin élémentaire de traversée de $\mathcal{X}^1$ au point f , il en est de même de $(\Psi \circ, \widetilde{\Psi}' \circ \widetilde{\Theta}')$.

Le lemme 3.1.15 découle alors de l'existence d'une "bonne isotopie" entre $\tilde{\Theta}'$ et un plongement définissant le même chemin élémentaire que le plongement standard de $D^1 \times D^{i-1} \times D^1$ dans $D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \times D^{n-i-1}$. (On appelle ici "bonne isotopie" une isotopie à travers des plongements satisfaisant aux conditions (B)). L'existence d'une telle isotopie se voit de la manière suivante :

D'après la remarque précédente, il suffit de rendre $\mathcal{O}'$ standard au voisinage de l'origine (la condition (B) a pour conséquence que $\mathcal{O}'$ envoie l'origine sur l'origine) ; soit φ^1 un plongement de $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{i-1} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-i-1}$ satisfaisant à des conditions analogues à (B).

Pour tout $t \in I$, $t \neq 0$, on définit un plongement

$$\varphi^t = (\varphi_1^t, \dots, \varphi_i^t, \varphi_n^t, \varphi_{i+1}^t, \dots, \varphi_{n-1}^t) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{i-1} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{i-1} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-i-1}$$

par les formules

$$\begin{cases} \varphi_1^t(x_1, \dots, x_i, x_n) = \frac{1}{t} \varphi_1^1(t^2 x_1, t x_2, \dots, t x_i, t x_n) \\ \varphi_j^t(x_1, \dots, x_i, x_n) = \frac{1}{t} \varphi_j^1(t^2 x_1, t x_2, \dots, t x_i, t x_n) \quad \text{si } j \neq 1. \end{cases}$$

Il est clair que φ^t vérifie encore (B).

Montrons que la limite de φ^t lorsque t tend vers 0 est encore un plongement au voisinage de l'origine ((B) est automatiquement satisfait) ; pour cela, écrivons le jet $\frac{d\varphi^1}{dx}(0)$ dans les coordonnées choisies : on obtient la $n \times (i+1)$ matrice

$$\frac{d\varphi^1}{dx}(0) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_{21} & \boxed{\begin{matrix} a_{22} & & a_{2i} \end{matrix}} & & & & 0 \\ \vdots & & \mathcal{M} & & & \vdots \\ a_{i1} & \boxed{\begin{matrix} a_{i2} & & a_{ii} \end{matrix}} & & & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{ni} & a_{nn} \\ a_{i+11} & \boxed{} & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n-11} & \boxed{} & & & & & \end{pmatrix} \quad \text{avec } a_{11} = a_{nn}^2$$

Pour que le rang soit $i+1$, il faut et il suffit que $a_{nn} \neq 0$ (donc $a_{11} \neq 0$) et que $\mathcal{M}$ soit inversible.

Or, dans les mêmes coordonnées, le jet de la limite φ^0 de φ^t lorsque t tend vers 0 est représenté par la matrice

$$\frac{d\varphi^0}{dx}(0) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\mathcal{M}} & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & 0 \\ 0 & a_{n2} & . & . & . & a_{ni} & a_{nn} \\ \vdots & \boxed{0} & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix}$$

qui est donc de rang $i+1$.

De plus, si on développe en série au voisinage de 0 les coordonnées de φ^1 , on obtient :

$$\varphi_1^1(x_1, \dots, x_i, x_n) = a_{11}x_1 + \sum_{j,k=1, \dots, i, n} b_{jk} x_j x_k + \dots$$

avec $b_{nn} = 0$. Donc

$$\varphi_j^0(x) = \frac{d\varphi_j^0}{dx}(0) \cdot x \text{ pour } j \neq 1, \text{ et } \varphi_1^0(x) = a_{11}x_1 + \sum_{j,k=2, \dots, i, n} b_{jk} x_j x_k.$$

Mais l'égalité $\varphi_1^0(x_1^2, x_2, \dots, x_i, x_1) = [\varphi_n^0(x_1^2, x_2, \dots, x_i, x_1)]^2$ détermine les b_{jk} ($j, k = 2, \dots, i, n$) en fonction des a_{n1} ($1 = 2, \dots, i$), ce qui montre qu'en multipliant tous les a_{n1} ($1 = 2, \dots, i$) par λ et en changeant les b_{jk} ($j, k = 2, \dots, i, n$) en conséquence, on obtient encore un plongement vérifiant (B).

On en déduit qu'il existe localement une "bonne isotopie" de φ^1 jusqu'au plongement linéaire défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\mathcal{M}} & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & a_{nn} \\ \vdots & \boxed{0} & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \quad (\text{avec } a_{11} = a_{nn}^2)$$

et donc (suivant le signe de a_{nn}) une "bonne isotopie" jusqu'à un plongement

$$\tilde{\xi}'_{\pm} : (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_n) \mapsto (x_1, \pm x_2, x_3, \dots, x_i, x_n, 0, \dots, 0) \quad ,$$

ou bien jusqu'à un plongement

$$\tilde{\eta}'_{\pm} : (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_n) \mapsto (x_1, \pm x_2, x_3, \dots, x_i, -x_n, 0, \dots, 0) \quad .$$

Il suffit maintenant de vérifier que les quatre plongements

$\tilde{\xi}'_{\pm}, \tilde{\eta}'_{\pm} : D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \rightarrow D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \times D^{n-i-1}$ définissent le même chemin élémentaire de traversée ; mais ceci est une conséquence de ce que les difféomorphismes $\xi_{\pm}, \eta_{\pm} \in \text{Diff}(D^1 \times D^{i-1})$ définis à partir de $\tilde{\xi}'_{\pm}, \tilde{\eta}'_{\pm}$ par les formules (A) appartiennent tous au sous-groupe G de $\text{Diff}(D^1 \times D^{i-1})$ défini lors de l'étude de la fibration $\mathcal{A}(\pi') : \mathcal{A}(\rho'_h) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_h$:

$$\xi_{\pm} : (x_1, \dots, x_i) \mapsto (x_1, \pm x_2, x_3, \dots, x_i)$$

$$\eta_{\pm} : (x_1, \dots, x_i) \mapsto (-x_1, \pm x_2, x_3, \dots, x_i) \quad .$$

Le lemme 3.1.15 est donc démontré, ainsi que le (2) du lemme 3.1.14.

En ce qui concerne la partie (3) du lemme 3.1.14, c'est une conséquence directe du lemme des "familles élémentaires" (voir paragraphe 1.2), compte-tenu de ce que, d'après le lemme 3.1.7, il est clair que par chaque point de $\mathcal{X}_{\alpha}^2$ (resp. $\mathcal{X}_{\beta}^2$) il passe une famille à 2 paramètres élémentaire de traversée de $\mathcal{X}_{\alpha}^2$ (resp. $\mathcal{X}_{\beta}^2$).

3.1.16 Nous pouvons maintenant commencer la démonstration du théorème 3.1.2. Soit $\hat{F} : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{X}^0 \cup \mathcal{X}^1)$ une application continue comme dans l'énoncé du théorème . Par hypothèse, $\hat{F}|_{\partial D^2}$ est lisse et transversale sur $\mathcal{X}^1$. De plus, si $F : X \times D^2 \rightarrow M$ est l'application associée à $\hat{F}$, on a supposé que la restriction de F à $X \times \partial_+ D^2$ est un plongement. Soit $B \subset \text{int}(\partial_- D^2)$ un fermé connexe tel que $\hat{F}(B) \subset \mathcal{X}^0$. D'après le théorème 3.1.1, ou plus exactement d'après sa démonstration (voir [4], chap. I, paragraphe 5) on peut, dès

que $n \geq 5$, $n-i \geq 3$, construire une homotopie, fixe sur $\partial_+ D^2$, dont l'origine est $\hat{F}$ et dont l'extrémité est une application $\hat{G}$ qui vérifie :

(i) $\hat{G}|_{\partial D^2}$ est lisse.

(ii) La restriction à $X \times \overline{(\partial D^2 - B)}$ de l'application associée $G : X \times D^2 \rightarrow M$ est un plongement.

D'après le lemme 3.1.5 bis, on peut approcher $\hat{G}$ arbitrairement près (au sens C^0), et sans changer sa restriction à $\overline{(\partial D^2 - B)}$, par une application $\hat{H}$ excellente. En particulier, $\hat{H} : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\mathcal{X}^0 \cup \mathcal{X}^1 \cup \mathcal{X}^2, \mathcal{X}^0 \cup \mathcal{X}^1)$.

Soit $A \subset \text{int}(\partial_+ D^2)$ un fermé tel que $\hat{F}(A) \subset \mathcal{X}^0$ (c'est-à-dire tel que $\hat{H}(A) \subset \mathcal{X}^0$).

Puisque $\hat{H}$ est une application excellente, la stratification induite par $\hat{H}$ sur D^2 est de la forme décrite au paragraphe 3.1.3. Un simple argument de transversalité montre qu'on peut décomposer D^2 en "secteurs élémentaires" (notés S_j , $j = 0, 1, \dots, 2p$) ayant les propriétés suivantes :

(i) la décomposition est l'image par un difféomorphisme $\varphi : D^2 \rightarrow D^2$ d'une décomposition de la forme ci-dessous (voir figure 3)

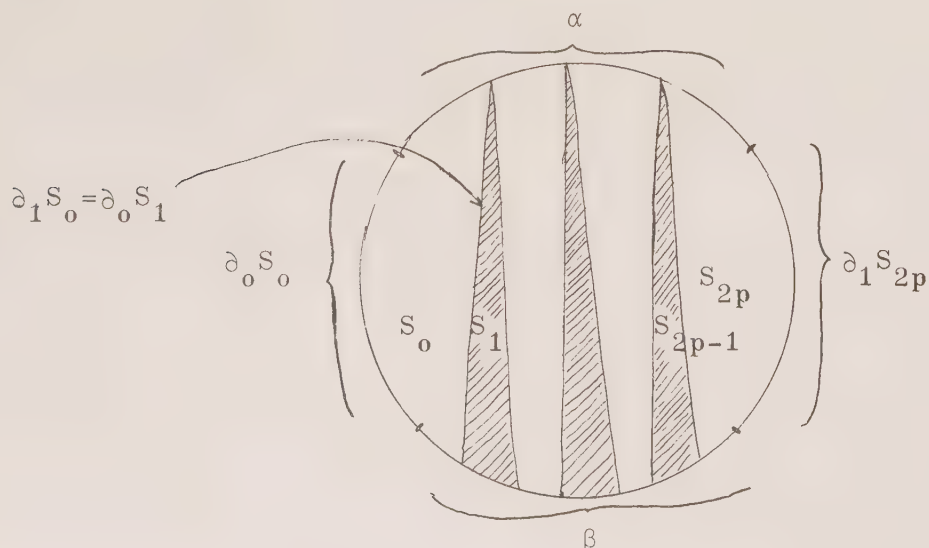


Figure 3

(ii) $\varphi(\alpha) = A$, $\varphi(\beta) = B$ (donc $\hat{H}\varphi(\alpha \cup \beta) \subset \mathcal{X}^0$). Pour chaque S_j , on notera $\partial_0 S_j$ et $\partial_1 S_j$ les deux bords "verticaux" de S_j (la définition de bord vertical est claire sur la figure 3) de façon que $\partial_1 S_j = \partial_0 S_{j+1}$. La condition (ii) dit en particulier que seuls les bords verticaux d'un secteur sont susceptibles de rencontrer $(\hat{H}\varphi)^{-1}(\mathcal{X}^1)$.

(iii) Si j est pair, la trace sur S_j de $(\hat{H}\varphi)^{-1}(\mathcal{X}^2)$ est vide, et la trace de $(\hat{H}\varphi)^{-1}(\mathcal{X}^1)$ est formée de segments disjoints partant transversalement de $\partial_0 S_j$ et arrivant transversalement sur $\partial_1 S_j$.

(iv) Si j est impair, ou bien il existe exactement un point de $\text{int } S_j$ qui est dans $(\hat{H}\varphi)^{-1}(\mathcal{X}^2)$, ou bien il existe exactement un segment dans $(\hat{H}\varphi)^{-1}(\mathcal{X}^1) \cap S_j$ dont l'origine et l'extrémité soient sur le même bord vertical de S_j . Dans les deux cas les (autres) composantes de $(\hat{H}\varphi)^{-1}(\mathcal{X}^1) \cap S_j$ vérifient la même condition que dans (iii).

Les plan de la démonstration est alors le suivant :
On commence par prouver que (quitte à rétrécir les S_{2j-1}) $\hat{H}$ est homotope rel. $(\partial D^2 - B)$ à une application $\hat{K}$ telle que la restriction à $X \times \varphi(\mathcal{V})$ de l'application associée $K : X \times D^2 \rightarrow M$ soit un plongement, où $\mathcal{V}$ est un voisinage dans D^2 de $(\partial D^2 - \beta) \cup (\bigcup_{j=1}^p S_{2j-1})$ (sur la figure 4 ci-dessous, on a hachuré $\mathcal{V}$).

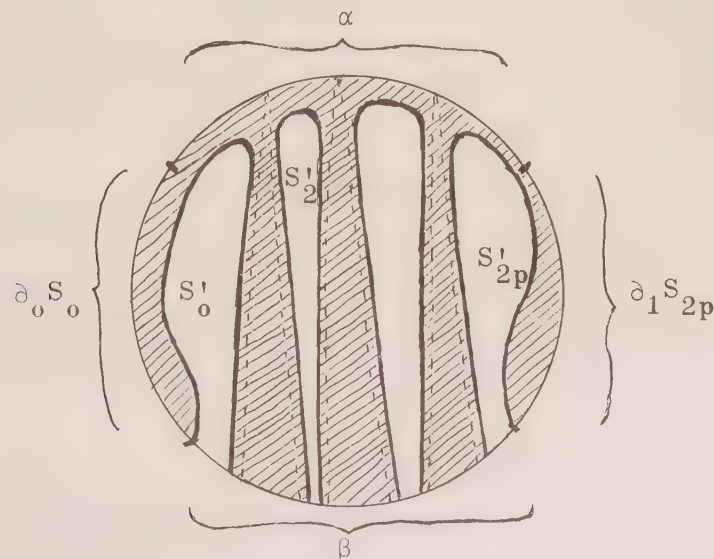


Figure 4

Cette partie utilise essentiellement les (1) et (3) du lemme 4.

Dans une deuxième étape, qui utilise le (2) du lemme 4, on prouve que $\hat{K}$ est homotope à $\hat{L}$ telle que l'application associée $L: X \times D^2 \rightarrow M$ soit un plongement, par une homotopie qui est constante sur $\varphi(\mathcal{V}')$, où $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ est un voisinage un peu plus petit de $(\partial D^2 - \beta) \cup (\bigcup_{j=1}^p S_{2j-1})$.

Dans la suite, nous raisonnerons toujours sur $\hat{H}\varphi$; il suffira à la fin d'appliquer le difféomorphisme φ^{-1} aux homotopies que l'on aura trouvées.

Notation : Si $\Delta \subset D^2$ est un fermé et si $t_0: \Delta \rightarrow \mathcal{X}$ est une application générique, on dira qu'une homotopie $T: \Delta \times I \rightarrow \mathcal{X}$ est une "bonne homotopie" si, pour tout $s \in I$, la restriction t_s de T à $\Delta \times \{s\}$ induit sur Δ une stratification isomorphe à celle induite par t_0 .

3.1.17 Lemme : Soit $n \geq 6$, $n-i \geq 4$. Pour tout $j = 1, \dots, p$, il existe une "bonne homotopie", constante sur le sommet σ_j de S_{2j-1} , entre la restriction à S_{2j-1} de $\hat{H}\varphi$ et une application $\hat{K}'_{2j-1}$ telle que l'application associée $K_{2j-1}: X \times S_{2j-1} \rightarrow M$ soit un plongement.

Démonstration : Nous noterons $\hat{H}_{2j-1} \equiv (\hat{H}\varphi)|_{S_{2j-1}}$.

Il y a 3 cas à regarder :

(i) $\hat{H}\varphi$ induit sur S_{2j-1} une stratification isomorphe à celle d'un modèle transverse de $\mathcal{X}_\alpha^2$ (resp. $\mathcal{X}_\beta^2$):

Le (3) du lemme 3.1.14 fournit une "bonne homotopie" constante sur σ_j dont l'origine est $\hat{H}_{2j-1}$ et dont l'extrémité $\hat{K}'_{2j-1}$ définit une famille à 2 paramètres élémentaire de traversée de $\mathcal{X}_\alpha^2$ (resp. $\mathcal{X}_\beta^2$) (pour être tout-à-fait correct, il faudrait modifier les définitions 3.1.10 et 3.1.11 en remplaçant, dans le diagramme, $D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \times D^1$ par $D^1 \times D^{i-1} \times S_{2j-1}$).

Supposons que la strate de codimension 2 rencontrée soit $\mathcal{X}_\alpha^2$; $\hat{K}'_{2j-1}$ est défini par un couple de plongements $\Phi: D^1 \times D^{i-1} \rightarrow X$, $\Phi': D^1 \times D^{i-1} \times S_{2j-1} \rightarrow M$, et la restriction à $(X - \text{Im } \Phi)$ de $\hat{K}'_{2j-1}(\theta)$ est

indépendante de $\theta \in S_{2j-1}$.

De plus (si on choisit, dans la définition de $k_{u,v}$, le support de ω égal à $D^1 \times D^{i-1}$) $\hat{K}'_{2j-1}$ définit un plongement de $[\text{int}(\text{Im } \Phi)] \times S_{2j-1}$ dans M , et donc un champ de secteurs (isomorphes à S_{2j-1}) normal à $\hat{K}'_{2j-1}(\sigma_j)(\text{Im } \Phi)$ dans M (rappelons que σ_j est le sommet de S_{2j-1}). L'hypothèse faite sur le fibré normal de X_0 dans M permet de prolonger ce champ en un champ de secteurs normaux à $\hat{K}'_{2j-1}(\sigma_j)(X)$ dans M , i.e. un tube trivialisé d'âme $\hat{K}'_{2j-1}(\sigma_j)(X)$ et de fibre S_{2j-1} tel que, pour tout $\theta \in S_{2j-1}$, la propriété suivante soit vérifiée : si $\delta \subset S_{2j-1}$ est la demi-droite définie par σ_j et θ , et si T_δ désigne le demi-tube trivialisé d'âme $\hat{K}'_{2j-1}(\sigma_j)(X)$ et fibre $\mathbb{R}_+$ défini par δ , alors $\hat{K}'_{2j-1}(\theta)(X) \subset T_\delta$; la translation suivant δ de longueur λ fois celle du segment $[\sigma_j, \theta]$ est bien définie pour les points de T_δ assez voisins de l'âme du tube : on note $\tau_{\lambda, \theta}$ cette translation.

Soit μ une fonction positive de X dans $\mathbb{R}$ dont le support est un voisinage assez petit de $(\overline{X - \text{Im } \Phi})$. On définit $K_{2j-1} : X \times S_{2j-1} \rightarrow M$ par la formule :

$$K_{2j-1}(x, \theta) = \tau_{\mu(x), \theta} \cdot K'_{2j-1}(x, \theta) .$$

Si le module de μ est assez petit, K_{2j-1} est bien définie, et est un plongement. Il est clair qu'il existe une bonne "homotopie" constante sur σ_j entre l'application $\hat{K}_{2j-1}$ ainsi définie et l'application $\hat{K}'_{2j-1}$.

Si la strate de codimension 2 rencontrée est $\mathfrak{X}_\beta^2$, la démonstration se fait de manière analogue en modifiant légèrement une famille à 2 paramètres élémentaire sur le complémentaire du support de la déformation. Là encore, on utilise l'hypothèse sur le fibré normal de X_0 dans M pour réaliser cette modification.

(ii) La stratification induite sur S_{2j-1} par $\hat{H}\phi$ comporte un seul segment c , et les extrémités de c sont situées sur le même "bord vertical" de S_{2j-1} (par exemple sur $\partial_0 S_{2j-1}$) :

Soit $\gamma \subset S_{2j-1}$ un segment, d'origine σ_j et d'extrémité sur $\partial_0 S_{2j-1}$, qui coupe c en un seul point et transversalement. En appliquant à $\hat{H}_{2j-1}|_\gamma$ le (1) du lemme 3.1.14, on trouve une "bonne homotopie" constante sur σ_j entre $\hat{H}_{2j-1}|_\gamma$ et un chemin élémentaire de traversée de X^1 . On modifie ce chemin de façon qu'il soit associé à un plongement de $X \times \gamma$ dans M (voir [4], ou bien (i) ci-dessus avec un paramètre de moins) et enfin on définit un plongement K_{2j-1} de $X \times S_{2j-1}$ dans M qui prolonge celui de $X \times \gamma$ dans M (ceci est possible par épaississement" grâce à l'hypothèse sur le fibré normal de X_0 dans M). Il est clair qu'on peut définir alors une "bonne homotopie" constante sur σ_j entre $\hat{H}_{2j-1}$ et $\hat{K}_{2j-1}$: on commence par "rétracter" $\hat{H}_{2j-1}$ sur $\hat{H}_{2j-1}|_\gamma$, on modifie $\hat{H}_{2j-1}|_\gamma$, puis on "épaissit".

(iii) Cas général :

Il existe une rétraction de déformation ρ_t de S_{2j-1} sur un complexe $\Sigma \equiv c_1 \vee \Delta \vee c_2$ isomorphe à $I \vee S_{2j-1} \vee I^*$, (voir figure 5), qui vérifie :

(1) au cours de la rétraction, $\partial_0 S_{2j-1}$ et $\partial_1 S_{2j-1}$ restent transverses à $\hat{H}_{2j-1}^{-1}(X^1)$ et ne rencontrent pas $\hat{H}_{2j-1}^{-1}(X^2)$.

(2) Si S_{2j-1} contient un point de $\hat{H}_{2j-1}^{-1}(X^2)$ ce point est dans l'intérieur de Δ ; si S_{2j-1} contient un segment de $\hat{H}_{2j-1}^{-1}(X^1)$ dont les extrémités sont sur le même bord latéral de S_{2j-1} , ce segment rencontre l'intérieur de Δ et est situé dans Δ de façon identique (c'est le cas représenté sur la figure 5).

(3) Δ ne rencontre pas les composantes de $\hat{H}_{2j-1}^{-1}(X^1)$ qui vont d'un "bord latéral" à l'autre de S_{2j-1} .

* Bien entendu, c_1 ou c_2 peuvent ne pas exister.

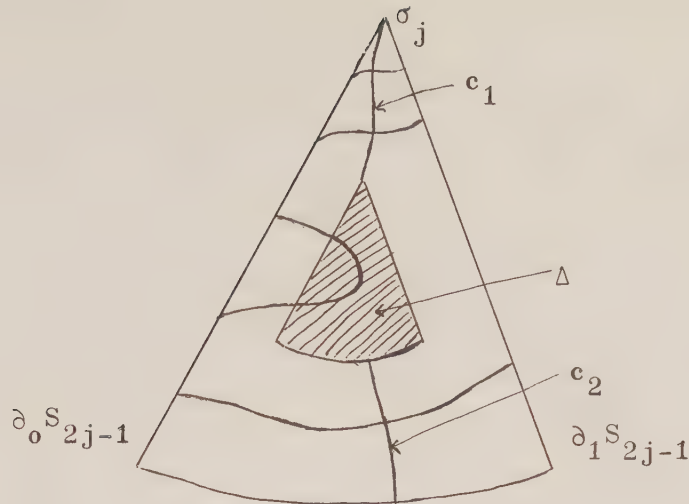


Figure 5

Il est clair que la composition de $\hat{H}_{2j-1}$ avec la rétraction de déformation ρ_t définit une "bonne homotopie" de $\hat{H}_{2j-1}$ constante sur σ_j . Montrons maintenant qu'il existe une "bonne homotopie" entre la restriction à Σ de $\hat{H}_{2j-1}$ et une application $\hat{K}'_{2j-1} : \Sigma \rightarrow \mathcal{X}$ associée à un plongement K'_{2j-1} de $X \times \Sigma$ dans M . On raisonne par récurrence comme dans la démonstration du théorème 2.1.1 (voir [4], chapitre I, paragraphe 5.2).

Les nouvelles conditions de dimension proviennent de la présence possible d'un point de $\hat{H}_{2j-1}^{-1}(\mathcal{X}^2)$ qui introduit une déformation élémentaire à 2 paramètres dont l'âme est un disque D^3 ; pour plonger $\hat{H}_{2j-1}|_{c_1}$, il suffit, d'après Cerf, d'avoir $n \geq 5$, $n-i \geq 3$; pour plonger $\hat{H}_{2j-1}|_{c_1 \vee \Delta}$, on est amené à disjoindre un disque D^3 d'un complexe de dimension $i+1$, ce qui est possible par position générale dès que $n-i \geq 5$ (en fait, il suffit de se disjoindre d'un voisinage d'un complexe isomorphe à la réunion de X et d'un nombre fini de disques D^2 , ce qui est possible dès que $n \geq 6$, $n-i \geq 4$) ; enfin, pour plonger $\hat{H}_{2j-1}|\Sigma$, on est amené à disjoindre un disque D^2 d'un complexe de dimension $i+2$, ce qui est possible dès que $n-i \geq 5$ par position générale. (Ici encore, il suffit en fait de disjoindre un disque D^2 d'un voisinage d'un complexe isomorphe à la réunion de X , d'un disque D^3 , et d'un nombre fini de disques D^2 , ce qui est possible dès que $n \geq 6$,

$n-i \geq 3$).

Maintenant, l'hypothèse sur le fibré normal de X_0 dans M permet "d'épaissir ce plongement" jusqu'à un plongement $K_{2j-1} : X \times S_{2j-1} \rightarrow M$, et on termine comme en (ii). cqfd

3.1.18 Lemme : Si $n \geq 7$, $n-i \geq 5$, il existe une "bonne homotopie", constante sur $\partial D^2 - \beta$, entre $\hat{H}\varphi$ et une application $\hat{K}$ telle que la restriction à $X \times \mathcal{V}$ de l'application associée $K : X \times D^2 \rightarrow M$ soit un plongement ($\mathcal{V}$ a été défini sur la figure 4).

Démonstration : D'après le lemme 3.1.17, il existe une "bonne homotopie", constante sur $\partial D^2 - \beta$, entre $\hat{H}\varphi$ et une application $\hat{K}'$ telle que l'application associée $K' : X \times D^2 \rightarrow M$ vérifie :

(1) la restriction à $\partial D^2 - \beta$ de K' est un plongement (par définition)

(2) Pour tout $j = 1, \dots, p$, la restriction de K' à S_{2j-1} est un plongement.

Si on observe que $\hat{K}'(\partial D^2 - \beta)$ est un complexe de dimension $i+1$ et que les $\hat{K}'(S_{2j-1})$ sont des voisinages (effilés au bord) de complexes qui sont réunion d'un nombre fini de disque D^2 et D^3 et d'un sous-complexe de $\hat{K}'(\partial D^2 - \beta)$, il apparaît que si l'on peut disjoindre deux disques D^3 l'un de l'autre ou bien un disque D^3 d'un complexe de dimension $i+1$, on pourra trouver une "bonne homotopie", constante sur $\partial D^2 - \beta$, entre $\hat{K}'$ et une application $\hat{K}''$ telle que la restriction de K'' à $X \times [(\partial D^2 - \beta) \cup (\bigcup_{j=1, \dots, p} S_{2j-1})]$ soit un plongement.

Or ceci est possible par position générale dès que $n \geq 7$, $n-i \geq 5$. L'existence d'une "bonne homotopie", constante sur $\partial D^2 - \beta$, entre $\hat{K}''$ et une application $\hat{K}$ comme dans l'énoncé du lemme 3.1.18 ne pose alors plus de problème.

Nous passons maintenant à la deuxième (et dernière) étape de la démonstration du théorème 3.1.2.

Notons S'_{2j} ($j = 0, \dots, p$) les composantes connexes de $D^2 - \text{int } \mathcal{V}$ (voir figure 4).

On appellera "bonne homotopie" de $\hat{K}|S'_{2j}$ une homotopie qui d'une part ne change pas la forme de la stratification induite sur S'_{2j} (comme précédemment) et d'autre part est constante sur $\partial S'_{2j} - (\partial S'_{2j} \cap \beta)$.

3.1.19 Lemme : Soit $n \geq 7$, $n-i \geq 5$. Pour tout $j = 0, \dots, p$, il existe une "bonne homotopie" entre $\hat{K}|S'_{2j}$ et une application L_{2j} telle que l'application associée $L_{2j} : X \times S'_{2j} \rightarrow M$ soit un plongement.

Démonstration : Elle se fait par récurrence sur le nombre de composantes connexes de $\hat{K}^{-1}(\mathcal{X}^1) \cap S'_{2j}$.

(i) Il y a une seule composante connexe :

On sépare $\partial S'_{2j} - (\partial S'_{2j} \cap \beta)$ en trois parties comme sur la figure 6 :

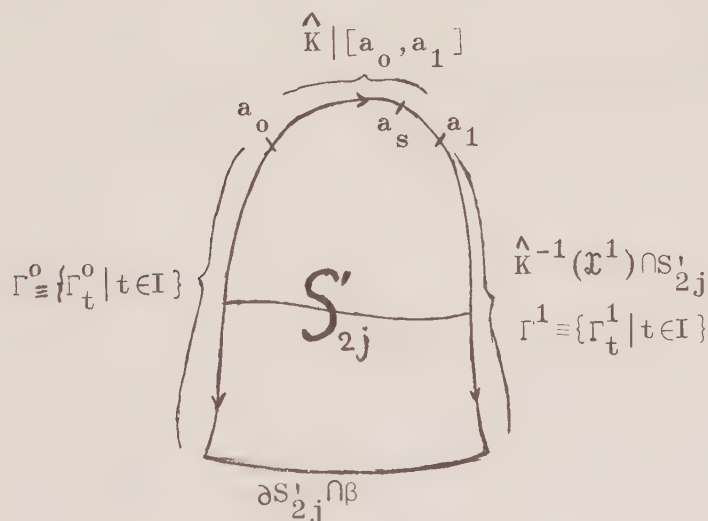


Figure 6

Le chemin Γ^0 (resp. Γ^1) correspond à un plongement k_0 (resp. k_1) de $X \times I$ dans M ; on montre facilement qu'il existe un plongement de $X \times S$ dans M (S est un secteur homéomorphe à $I \times I / I \times \{0\}$) dont l'image est dans un voisinage arbitraire de $k_0(X \times I)$ (resp. $k_1(X \times I)$), qui réalise une homotopie entre le chemin Γ^0 (resp. Γ^1) et un chemin Γ'^0 (resp. Γ'^1) obtenu à partir d'un chemin élémentaire γ^0 (resp. γ^1) de traversée de $\mathcal{X}^1$ d'origine $\hat{K}(a_0)$ (resp. $\hat{K}(a_1)$) par "épaississement" le long d'une section du fibré normal de $\hat{K}(a_0)(X)$ (resp. $\hat{K}(a_1)(X)$) dans M . (Dans [4], Cerf les appelle "chemins de Whitney modifiés").

Puisque la restriction de K à $X \times [\partial S'_{2j} - (\partial S'_{2j} \cap \beta)]$ est un plongement dans M , on peut supposer que les deux plongements de $D^1 \times D^{i-1} \times D^1$ dans M qui définissent γ^0 et γ^1 ont des images disjointes entre elles et disjointes de $K(X \times]a_0, a_1[)$.

Si on recolle les homotopies naturelles entre γ^0 et Γ^0 (resp. entre γ^1 et Γ^1) avec la restriction de $\hat{K}$ à S'_{2j} , on définit une famille à 1 paramètre de chemins de traversée de $\mathcal{X}^1$ (d'origine variable) entre γ^0 et γ^1 . Le (2) du lemme 3.1.14 a le corollaire suivant : il existe une famille à 1 paramètre $\{\gamma^s | s \in I\}$ de chemins élémentaires de traversée de $\mathcal{X}^1$ qui vérifie

(1) cette famille est homotope à la précédente en tant qu'application de $I \times I$ dans $\mathcal{X}$, rel. $I \times \partial I \cup \{0\} \times I$.

(2) si $0 \leq s \leq 1/2$, $\gamma_0^s = \hat{K}|_{a_{2s}}$
 si $1/2 \leq s \leq 1$, $\gamma_0^s = \hat{K}|_{a_1}$.

Pour le voir, on reprend les fibrations de la démonstration du lemme des chemins élémentaires (voir [4], chapitre I, paragraphe 2.2). On se ramène alors sans difficulté à une famille à 1 paramètre (encore appelée γ^s) de chemins élémentaires ayant les mêmes propriétés, mais où (2) est remplacé par (2') $\gamma_0^s = \hat{K}|_{a_s}$. Cette famille est définie par un diagramme commutatif (voir le début de la démonstration du lemme 3.1.14) :

$$\begin{array}{ccc}
 D^1 \times D^{i-1} \times I & \xrightarrow{(\mathcal{G})} & X \times I \\
 \downarrow l_t \times \text{id} & & \downarrow \mathfrak{F}_t \\
 (\text{resp. } l_{1-t} \times \text{id}) & & \\
 D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \times I & \xrightarrow{(\mathcal{G})'} & M \times I
 \end{array}$$

où

$$\mathfrak{F}_t(x, s) = (\gamma_t^s(x), s), \quad \mathcal{G}(x, s) = (\mathcal{G}_s(x), s), \quad \mathcal{G}'(y, s) = (\mathcal{G}'_s(y), s),$$

et

$$(i) \quad \text{pour tout } s \in I, \quad \gamma_t^s = \gamma_0^s \quad \text{sur} \quad \overline{X - \mathcal{G}_s(D^1 \times D^{i-1})},$$

$$(ii) \quad \text{pour tout } s \in I, \quad \gamma_0^s = \hat{K}|_{a_s}.$$

Appelons Ψ l'application $p \circ \mathcal{G}' : D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \times I \rightarrow M$, où $p : M \times I \rightarrow M$ est la projection naturelle. Par construction, la restriction de Ψ à $D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \times \partial I \cup \Lambda \times I$ est un plongement dans M , où

$$\Lambda \equiv \Lambda_s = \{(x_1, \dots, x_i, x_n) \in D^1 \times D^{i-1} \times D^1, x_1 = x_n^2 - \frac{\varepsilon}{2} \omega(x_n, x_2, \dots, x_i)\}$$

dans le cas de chemins de suppression (l_t dans le diagramme)

$$\Lambda \equiv \Lambda_a = \{(x_1, \dots, x_i, x_n) \in D^1 \times D^{i-1} \times D^1, x_1 = x_n^2 + \frac{\varepsilon}{2} \omega(x_n, x_2, \dots, x_i)\}$$

dans le cas de chemins d'apparition (l_{1-t} dans le diagramme).

Nous ne distinguerons pas entre les deux cas :

On commence par approcher la famille $\{\gamma^s | s \in I\}$ par une famille $\{\gamma'^s | s \in I\}$ ayant les mêmes propriétés, et telle que l'application Ψ correspondante soit un plongement sur $D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \times \partial I \cup \Lambda \times I \cup D^1 \times \{0\} \times D^1 \times I$; c'est possible par position générale (et parce qu'une application proche d'un plongement est un plongement) dès que $n \geq 7$, $n-i \geq 5$ (voir figure 7).

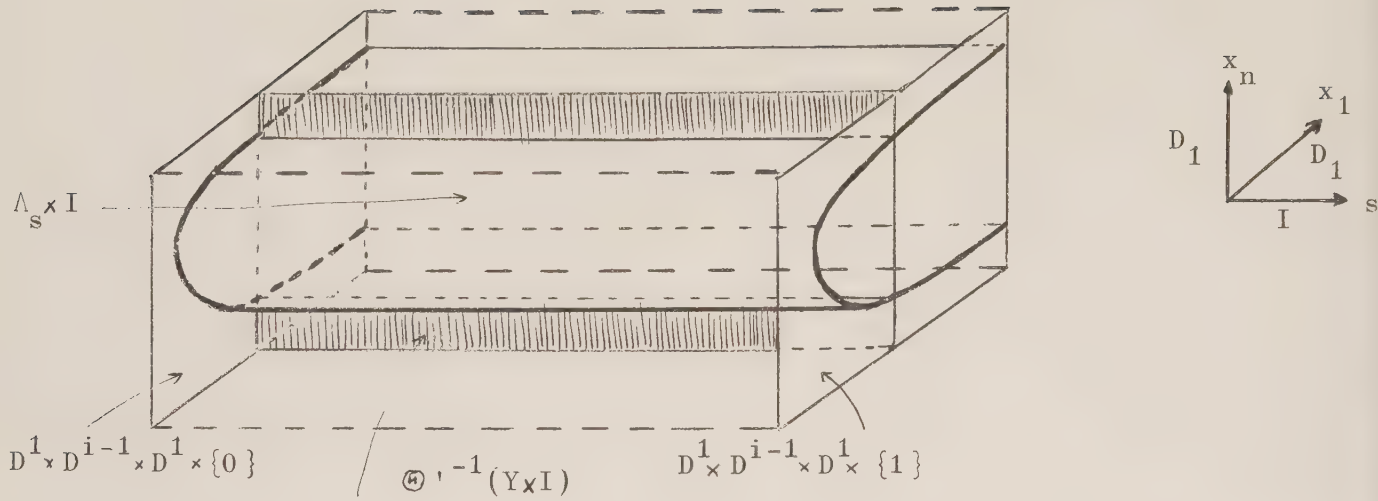


Figure 7 (cas où $D^{i-1} = \{0\}$) (chemins de suppression)

L'intérêt d'avoir commencé par plonger $D^1 \times \{0\} \times D^1 \times I$ est que cette partie de $D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \times I$ contient la réunion des âmes des chemins γ'^s ; sans introduire de nouvelle condition de dimension, on trouve alors une homotopie (constante sur ce qui est déjà plongé) entre la famille $\{\gamma'^s | s \in I\}$ et une famille $\{\varepsilon^s | s \in I\}$ telle que l'application Ψ correspondante soit un plongement de $D^1 \times D^{i-1} \times D^1 \times I$ dans M (on utilise pour cela le fait que l'espace des plongements de D^{i-1} dans M a même type d'homotopie que son espace de jets à l'origine).

Pour passer de là à l'application $\hat{L}_{2j} : S'_{2j} \rightarrow \mathcal{K}$ qu'on recherche, on procède en trois temps (voir figure 8) : on commence par trouver une famille à 1 paramètre de chemins de traversée entre Γ'^0 et Γ'^1 qui corresponde à un plongement de $X \times I \times I$ dans M ; la méthode est la même que précédemment : on "épaissit" l'application de $X \times I \times I$ dans M correspondant à la famille $\{\varepsilon^s | s \in I\}$ en utilisant une section du fibré normal du plongement de $X \times I$ dans M associé au chemin $(\Gamma'^0)^{-1} * \hat{K} | [a_0, a_1] * (\Gamma'^1)$. On disjoint alors l'image de ce plongement de l'intérieur de l'image des

plongements de $X \times S$ dans M donnant les homotopies entre Γ^0 et Γ'^0 , Γ^1 et Γ'^1 (c'est possible car il suffit de disjointre l'image de $D^1 \times D^1 \times I$ d'un voisinage d'un complexe de dimension $i+1$). Enfin on se ramène à un plongement lisse grâce au théorème d'isotopie locale (voir [2], corollaire 2, page 331).

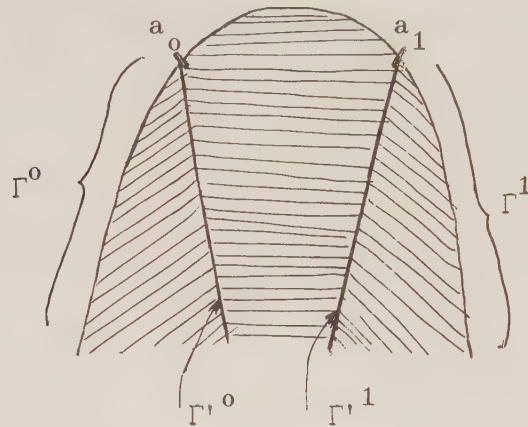


Figure 8

(ii) Cas général :

La récurrence est exactement du même type que celle utilisée par Cerf pour démontrer le théorème 3.1.1 ; on suppose S'_{2j} partagé en 2 parties A et B comme sur la figure 9

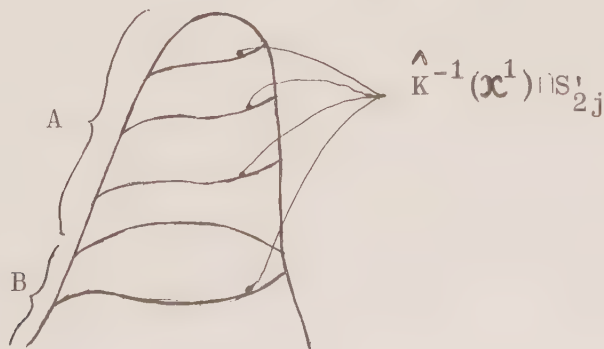


Figure 9

On suppose (hypothèse de récurrence) que $K|X \times A$ est un plongement, et que $K|X \times B$ est un plongement obtenu comme dans le (i) à partir d'une famille à 1 paramètre de chemins élémentaires de traversée de X^1 . Grâce au théorème d'isotopie locale appliqué à $K|X \times A$ au voisinage de $X \times (A \cap B)$, on peut supposer que K est encore différentiable.

Le problème est alors de disjoindre de $K(X \times A)$ l'"âme" (de dimension 3 puisque c'est l'image de $D^1 \times \{0\} \times D^1 \times I$) de la déformation $\hat{K}|B$. Mais $K(X \times A)$ est un voisinage d'une réunion de sous-complexes de dimensions 3 et $i+1$, et la disjonction se fait par position générale dès que $n \geq 7$, $n-i \geq 5$. cqfd

3.1.20 Fin de la démonstration du théorème 3.1.2 :

En appliquant le lemme 3.1.18 et le lemme 3.1.19, on peut supposer que $K|X \times \mathcal{U}$ est un plongement, et que pour tout $j = 0, \dots, p$, $K|X \times S'_{2j}$ est un plongement. En appliquant le théorème d'isotopie locale à $X \times \mathcal{U}$ au voisinage de $X \times [\bigcup_{j=0, \dots, p} (\partial S'_{2j} - (\partial S'_{2j} \cap \beta))]$, on peut supposer que K est différentiable (on ne change pas K sur $X \times \mathcal{U}'$).

Pour rendre K plongée sur $X \times D^2$, le raisonnement est toujours le même : $K(X \times \mathcal{U})$ est un voisinage d'une réunion d'un complexe de dimension $i+1$ et de complexes de dimension 3 ; chaque $K(S'_{2j})$ s'obtient à partir de $K(X \times \mathcal{U})$ par des déformations dont l'"âme" est de dimension 3 ; là encore la possibilité de disjoindre est simplement une propriété de position générale. cqfd

3.2 Unicité de l'élimination des queues d'aronde :

3.2.1 Théorème : Soit $F: (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\mathfrak{F}(W), \mathfrak{F}^0(W))$ une application continue générique du disque dans l'espace des fonctions différentiables à valeurs réelles définies sur une variété W de dimension $n+1$. On suppose que le graphique de F est comme sur la figure 10, les strates de codimension 1 et 2 rencontrées correspondant à trois points critiques d'indices $i+1, i, i+1$ de la fonction $F(0)$. Si $n \geq 7$, et $n-i \geq 5$, il existe une homotopie constante sur ∂D^2 , d'origine $F_0 \equiv F$ et d'extrémité une application $F_1: D^2 \rightarrow \mathfrak{F}^0(W)$. De plus, on peut choisir cette homotopie de façon que pour toutes les valeurs de t sauf une la stratification induite sur D^2 par F_t soit isomorphe à celle induite par F_0 ou par F_1 , la valeur exceptionnelle t_0 du paramètre correspondant à un contact d'ordre 1 du disque $F_{t_0}(D^2)$ avec une strate de codimension 2 du type $\mathfrak{F}_\alpha^2(W)$ (voir figure 11).

3.2.2 Remarques :

(1) Séparons D^2 en deux demi-disques Δ_0, Δ_1 comme sur la figure 12. Soit $\delta = \partial \Delta_0 \cap \partial \Delta_1$; $F|_\delta$ est un chemin dont le graphique est une queue d'aronde et les restrictions de F à Δ_0 et Δ_1 sont des homotopies de $F|_\delta$ qui éliminent cette queue d'aronde. On peut encore énoncer le théorème ci-dessus en disant que $F|_{\Delta_0}$ et $F|_{\Delta_1}$ sont homotopes à travers des applications du même type ; il existe donc une seule façon (au moins homotopiquement) d'éliminer une queue d'aronde du graphique d'un chemin.

(2) Comme pour le théorème 2.1.1, il peut exister d'autres points critiques auxquels n'arrive aucun accident.

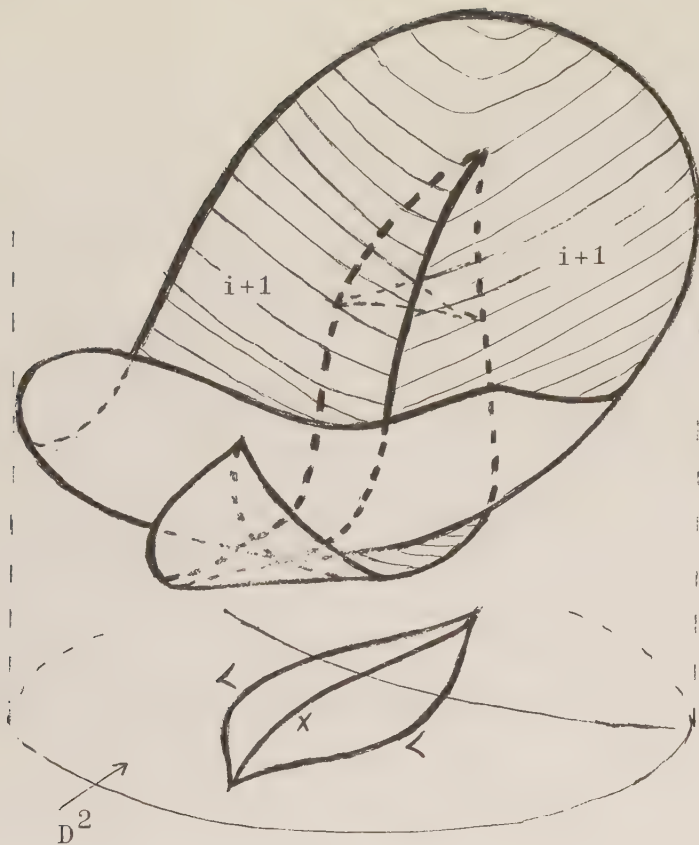


Figure 10 (graphique) d'après [27]

au-dessus de chaque point $x \in D^2$, on a mis les valeurs critiques de la fonction $F(x)$.

On obtient, par projection, la trace induite par F sur D^2 de la stratification naturelle de $\mathfrak{F}(W)$.

1ère élimination 2de élimination

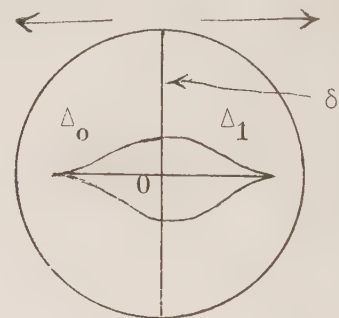


Figure 12

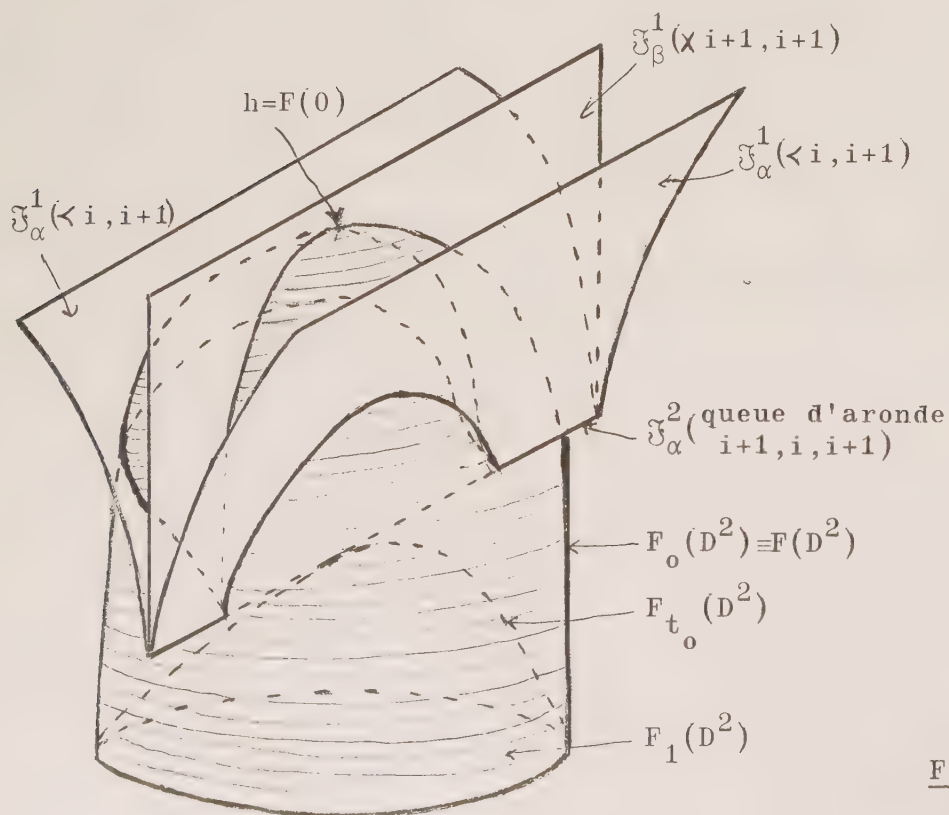


Figure 11 (dans l'espace fonctionnel)

3.2.3 Démonstration : Les détails sont identiques à ceux de la démonstration du théorème 2.1.1. Nous appellerons "bonne homotopie" de F_0 une homotopie F_t telle que pour tout $t \in I$, la stratification induite sur D^2 soit la même. Il suffit, pour démontrer le théorème 3.2.1, de trouver une "bonne homotopie" telle que $F_1(D^2) \subset \mathfrak{F}^0$. Les résultats des paragraphes 1.3 et 1.6 nous fournissent une "bonne homotopie" entre F et une application G ayant les propriétés suivantes (voir figure 13) :

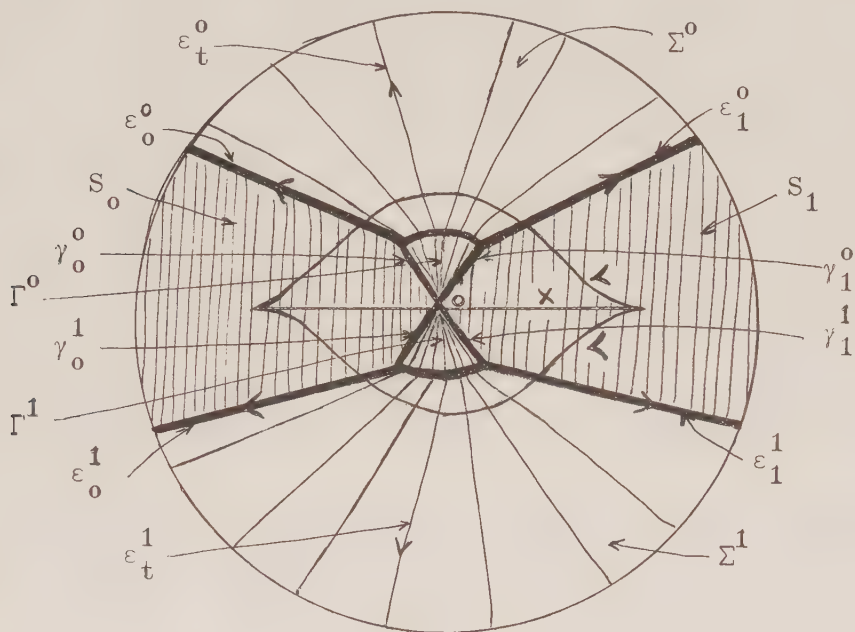


Figure 13

(1) $G(0) = F(0) = h$ a trois points critiques d^0 , a , d^1 d'indices respectifs $i+1$, i , $i+1$, avec d^0 et d^1 au même niveau.

(2) Il existe une décomposition de D^2 comme réunion de secteurs fermés S_0 , S_1 , Γ^0 , Γ^1 , Σ^0 , Σ^1 telle que :

(2a) $G|_{S_0}$ et $G|_{S_1}$ sont des familles élémentaires à 2 paramètres de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2$ issues de h .

(2b) $G|_{\Gamma^0}$ et $G|_{\Gamma^1}$ sont des familles à 1 paramètre de demi-chemins élémentaires de croisement.

(2c) $G|_{\Sigma^0}$ et $G|_{\Sigma^1}$ sont des familles à 1 paramètre de chemins élémentaires d'élimination.

Notations : $\varepsilon_j^k = \partial S_j \cap \partial \Sigma^k$, $\gamma_j^k = \partial S_j \cap \partial \Gamma^k$ ($j, k = 0, 1$) ; $G|_{\Sigma^k} \equiv \{\varepsilon_t^k | t \in I\}$, $G|_{\Gamma^k} \equiv \{\gamma_t^k | t \in I\}$ ($k = 0, 1$).

(3) $G|_{S_0}$ (resp. $G|_{S_1}$) est associée (notation du chapitre 1) à un triple de nappes en bonne position (D_0^0, A, D_0^1) [resp. (D_1^0, A, D_1^1)] adaptées à la fonction $h = F(0) = G(0)$, où D_0^0 et D_1^0 descendent de d^0 , D_0^1 et D_1^1 descendent de d^1 , A monte de a , toutes ces nappes étant limitées à une même variété M intermédiaire pour h . On peut supposer de plus que D_0^0 et D_1^0 (resp. D_0^1 et D_1^1) coïncident au voisinage de d^0 (resp. d^1) (par exemple au-dessus d'une variété intermédiaire $\tilde{M}$).

(4) Les chemins γ_t^0 (resp. γ_t^1) sont associés à des nappes montant de d^1 (resp. d^0) adaptées à h , et on peut supposer que toutes les fonctions de la famille $G|_{\Gamma^0 \cup \Gamma^1}$ coïncident avec h au-dessous de $\tilde{M}$.

(5) Les chemins ε_t^k sont associés à une famille de couples de nappes en bonne position (D_t^k, A) correspondant aux points critiques (d^k, a) et adaptées à toutes les fonctions de la famille $G|_{\Gamma^k}$ ($k = 0, 1$).

De plus, toutes les nappes D_t^k coïncident avec D_0^k et D_1^k au-dessus de $\tilde{M}$ ($k = 0, 1$).

La seule chose qui n'est pas immédiate à partir du chapitre 1 est la propriété (2c) (combinée d'ailleurs avec la propriété (5)). Pour se ramener à $\pi_1(\mathcal{C}(f), \tilde{\mathcal{E}l}(f)) = 0$ [$\mathcal{C}(f)$ = chemins d'élimination, $\tilde{\mathcal{E}l}(f)$ = chemins élémentaires d'élimination], on utilise l'argument qui au chapitre 2 permet, dans la démonstration de l'implication (Prop. 2.1.6 $\Rightarrow$ th. 2.1.1), de trouver la deuxième homotopie entre μ'_0 et ε'_0 (voir immédiatement avant la démonstration de la proposition 2.1.6).

La situation est résumée sur la figure 14.

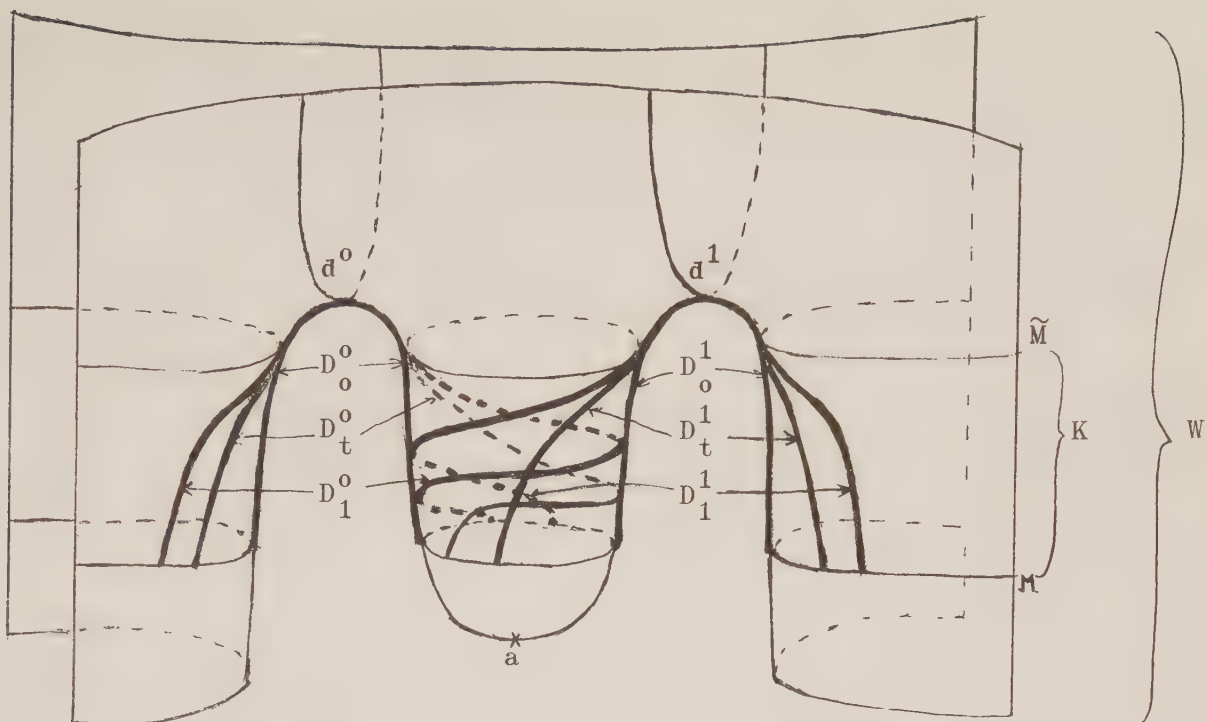


Figure 14 ($h = F(0) = G(0)$ est la fonction hauteur).

[Sur cette figure on a représenté deux nappes D_t^0 et D_t^1 dont l'intersection n'est pas vide.]

3.2.4 Lemme : Si $n \geq 7$, $i \leq n-5$, on peut supposer que, pour tout $t \in I$, $D_t^0 \cap D_t^1 = \emptyset$, ce qui fournit une famille à 1 paramètre $\{(D_t^0, A, D_t^1) \mid t \in I\}$ de triples de nappes en bonne position pour la fonction h .

Démonstration : Elle est similaire (à un paramètre de plus) à la démonstration du lemme 2.1.5.

Soit $\mathfrak{M}$ une métrique riemannienne sur W pour laquelle le triple (D_0^0, A, D_0^1) soit de gradient, soit K la partie de W limitée par M et $\tilde{M}$, et soit $\Psi: \tilde{M} \times I \rightarrow K$ le difféomorphisme défini par $\mathfrak{M}$.

On commence par trouver, dans l'espace des triples de nappes en bonne position coïncidant avec (D_1^0, A, D_1^1) en dehors de K , une homotopie entre

le triple (D_1^0, A, D_1^1) et un triple $(\Delta_1^0, A, \Delta_1^1)$ ayant la propriété suivante : Δ_1^0 (resp. Δ_1^1) correspond par le difféomorphisme ψ^{-1} à une famille à 1 paramètre de plongements de S^i dans $\tilde{M}$ représentée par un plongement de $S^i \times I$ dans $\tilde{M}$, et ces deux plongements ont des images disjointes : la démonstration est une simple application du théorème 3.1.1 au cas où X est la réunion disjointe de deux sphères S^i , et Y une sphère S^{n-i} ; les conditions d'application sont $n \geq 5$, $i \leq n-3$.

Grâce à la fibration de l'espace des plongements du modèle d'élimination des queues d'aronde adaptés à h sur l'espace des triples de nappes en bonne position adaptées à h (voir 1.6.8), on peut supposer que (D_1^0, A, D_1^1) a déjà cette propriété.

Le théorème 3.1.2 (ou plutôt un énoncé équivalent où "disjonction de deux familles à 2 paramètres" remplace "plongement d'une famille à 2 paramètres") fournit alors une homotopie rel. le bord du chemin $\{D_t^0 | t \in I\}$ (resp. du chemin $\{D_t^1 | t \in I\}$) dans l'espace des nappes adaptées à h coïncidant avec D_0^0 (resp. D_0^1) en dehors de K aboutissant à une famille $\{E_t^0 | t \in I\}$ (resp. $\{E_t^1 | t \in I\}$) telles que : pour tous $s, t \in I$, $E_s^0 \cap E_t^1 = \emptyset$; en particulier, pour tout $t \in I$, $E_t^0 \cap E_t^1 = \emptyset$ et le triple (E_t^0, A, E_t^1) est en bonne position.

Les conditions de dimension viennent de la nécessité de disjoindre dans $\tilde{M}$ un voisinage d'un complexe C_0 d'un voisinage d'un complexe C_1 , où $C_0 = A_0 \cup B_0$, $C_1 = A_1 \cup B_1$, $\dim A_0 = \dim A_1 = i+1$, $\dim B_0 = \dim B_1 = 3$, et $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, ce qui est possible par simple position générale dès que $i+1+3 < n$, et $3+3 < n$, c'est-à-dire $n \geq 7$, et $i \leq n-5$.

Enfin, grâce à la fibration de l'espace des plongements du modèle d'élimination sur l'espace des couples de nappes en bonne position et à un argument déjà utilisé au chapitre 2 et au paragraphe 3.2.3, on peut supposer que pour tout $t \in I$, le triple (D_t^0, A, D_t^1) est lui-même un triple en bonne position, ce qui démontre le lemme (quand on dit on peut supposer, cela signifie bien sûr "à une bonne homotopie de G près").

3.2.5 On déduit du lemme 3.2.4 l'existence d'une famille à 1 paramètre $\{\Phi_t \mid t \in I\}$ de familles élémentaires à 2 paramètres de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2$ issues de h , qui vérifie :

$$(1) \quad \Phi_0 = G \mid S_0$$

(2) Pour tout $t \in I$, la famille Φ_t est associée au triple de nappes en bonne position (D_t^0, A, D_t^1) .

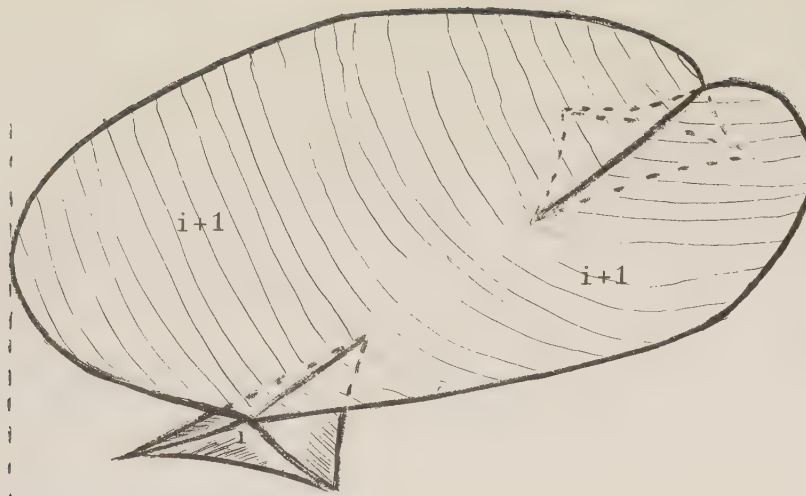
La fin de la démonstration du théorème 3.2.1 est un analogue à un paramètre de la démonstration du théorème 2.1.1 à partir de la proposition 2.1.6. On utilise la connexité du complexe des familles élémentaires à 2 paramètres de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2$ issues de h qui sont associées à un même triple de nappes en bonne position [à savoir (D_1^0, A, D_1^1)], et la simple connexité du complexe des chemins élémentaires d'élimination issus d'une fonction, qui sont associés à un même couple de nappes en bonne position (voir paragraphes 1.6.12 et 1.4.5). Nous ne répèterons pas les détails de la démonstration, car ils ont déjà été vus au chapitre 2.

Ceci termine la démonstration du théorème 3.2.1, qu'on obtient d'ailleurs sous la forme énoncée à la remarque 3.2.2.

3.3 Unicité de l'apparition des queues d'aronde :

Comme dans le cas du lemme d'unicité des naissances (voir [4]), le problème de l'unicité de l'apparition des queues d'aronde est de nature locale et est donc beaucoup plus facile à résoudre que le problème précédent. Nous allons démontrer le

3.3.1 Théorème : Soit $F: D^2 \rightarrow \mathfrak{F}(W)$ une application continue générique du disque dans l'espace des fonctions différentiables réelles définies sur une variété W . On suppose que le graphique de F est comme sur la figure 15, les strates de codimension 1 et 2 rencontrées correspondant à trois points critiques d'indices $i+1, i, i+1$. Si $i \neq 0$, il existe une homotopie F_t



[Comparer à la figure 10]



Figure 15 (graphique

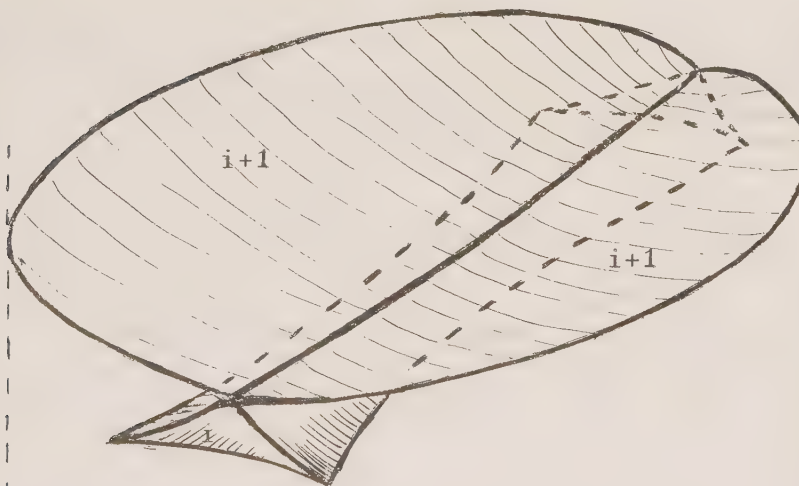


Figure 16 (graphique

constante sur ∂D^2 , d'origine $F_0 \equiv F$ et d'extrémité une application $F_1 : D^2 \rightarrow \mathfrak{F}^0(W) \cup \mathfrak{F}^1(W)$ dont le graphique est comme sur la figure 16.

3.3.2 Remarques :

(1) On peut faire sur l'homotopie F_t des remarques analogues à celles du théorème 3.2.1.

(2) Le théorème dit exactement que si $i \neq 0$, il existe (à homotopie près) une seule famille à 2 paramètres de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2$ issue d'une fonction ayant un seul point critique, d'indice $i+1$.

Si $i = 0$, il y a (à homotopie près) deux telles familles, l'une se déduisant de l'autre par une symétrie de D^2 par rapport à un diamètre.

(3) Comme pour les théorèmes 2.1.1 et 3.2.1, il peut exister d'autres points critiques auxquels n'arrive aucun accident.

3.3.3 Démonstration : On sépare D^2 en deux demi-disques Δ_0, Δ_1 , et on considère les restrictions $F|_{\Delta_0}$ et $F|_{\Delta_1}$ comme des familles à 2 paramètres de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2$ issues de la fonction $F(0)$ (dont on suppose qu'elle a un seul point critique, d'indice $i+1$).

On remplace alors $F|_{\Delta_0}$ et $F|_{\Delta_1}$ par des familles élémentaires à 2 paramètres de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2$. Pour démontrer le théorème 3.3.1, il suffit maintenant de prouver que, si $i \neq 0$, le complexe des familles élémentaires issues de $F(0)$ est connexe. Mais une telle famille est déterminée par la donnée d'un plongement du modèle de Morse[♦] d'indice $i+1$ dans W adapté à $F(0)$ et à la fonction standard $-x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 - \theta(x) \varepsilon \lambda_0^2 x_{n+1}^2 - x_{n+1}^4/4$ sur le modèle (voir paragraphe 1.6). En utilisant l'appendice de [4] on montre que l'espace $\mathcal{P}$ de ces plongements adaptés a même type d'homotopie que son espace $J_o^{1\mathcal{P}}$ des jets d'ordre 1 à l'origine, lequel (si on ne considère que des plongements conservant l'orientation) est isomorphe à $SO(i+1, (n+1) - (i+1)) \times]0, \infty[$; ce dernier espace est connexe si $i+1 = n+1$, et a deux composantes connexes sinon.

[♦] ou plus exactement d'un modèle qui s'en déduit canoniquement.

Si $i \neq 0, n$, et si $\varphi \in \mathcal{P}$, le composé de φ avec le difféomorphisme du modèle de Morse défini par

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_i, -x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1})$$

n'est pas dans la même composante connexe de $\mathcal{P}$ que φ , mais définit la même famille élémentaire à 2 paramètres de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2$, ce qui démontre le théorème.

Si $i = 0$, le composé de φ avec le difféomorphisme du modèle de Morse défini par

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n, -x_{n+1})$$

n'est pas dans la même composante connexe de $\mathcal{P}$ que φ , et définit une famille élémentaire qui s'obtient à partir de celle définie par φ par une symétrie de D^2 par rapport à un diamètre δ (voir figure 17).

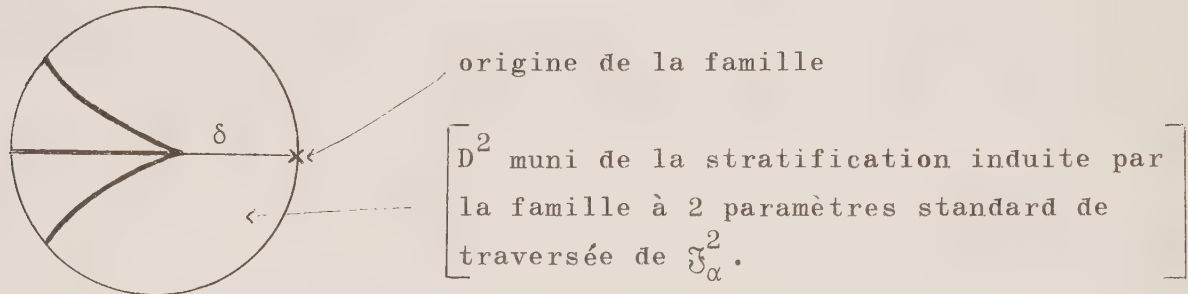


Figure 17

La différence entre le cas $i = 0$ et les autres tient à la non-connexité du complémentaire de l'origine dans une nappe descendant d'un point critique d'indice $i+1 = 1$.

3.3.4 Connexité de l'espace des chemins en queue d'aronde :

On montre immédiatement à partir du théorème 2.1.1 et du théorème 3.3.1, le

Corollaire : Soit $h: W \rightarrow I$ une fonction de Morse excellente, soit c un point critique d'indice $i+1$ de h ; on note $Q(h, c)$ l'espace (muni de la topologie C^0) des "chemins en queue d'aronde" d'origine h relatifs à c (c'est-à-dire des chemins dont le graphique est comme sur la figure 18).

Si $1 \leq i \leq n-3$, l'espace $Q(h, c)$ est connexe par arcs.

Si $i = 0$, l'espace $Q(h, c)$ a deux composantes connexes par arcs.

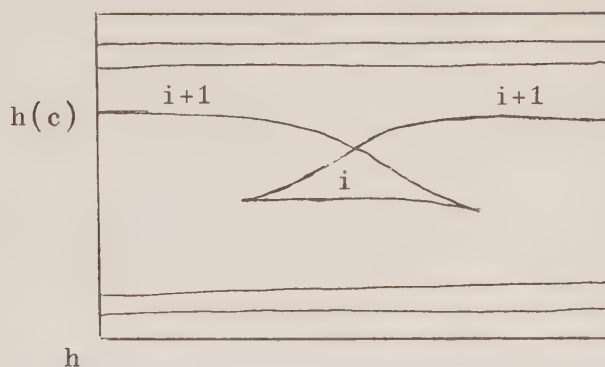


Figure 18 (graphique)

Remarques :

(1) Les deux composantes dans le cas $i = 0$ viennent de la non-unicité des naissances à un niveau de h immédiatement inférieur à celui de c .

(2) Le lemme 2 du paragraphe 4.2 du chapitre IV de [4] entraîne le corollaire 3.3.4 dans le cas où $\pi_1(W) = 0$; en effet, on s'aperçoit que dans le cas $i \neq 0$, deux représentants des composantes a priori distinctes sont des chemins $hglk$ et $hgl'k'$ comme sur la figure 19, où gl et gl' sont deux chemins élémentaires de croisement non homotopes, mais où gl' est homotope au composé $\omega * gl$, le lacet ω étant le bord d'un cône non trivial de naissances issu de h . Puisque dans [4] on se place dans les conditions de validité du lemme d'unicité des morts, on voit immédiatement que

$hglk$ et $hgl'k'$ sont homotopes dans $Q(h,c)$ (mais non homotopes rel. hg).

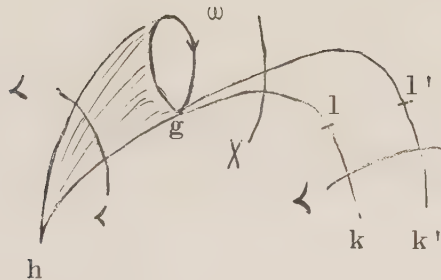


Figure 19

3.4 Conséquences de l'unicité de l'élimination des queues d'aronde :

Ce paragraphe correspond (avec un paramètre de plus) au paragraphe 2.2 du chapitre 2, aussi passerons-nous rapidement sur les démonstrations

3.4.1 Théorème (unicité faible des familles à un paramètre d'éliminations sur un cobordisme élémentaire)*

Soit $F: (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\mathfrak{F}(W), \mathfrak{F}^0(W))$ une application continue générique du disque dans l'espace des fonctions différentiables réelles définies sur une variété W de dimension $n+1$. On suppose que le graphique de F est comme sur la figure 20 (a) et qu'il existe une nappe descendant du point critique d'indice j jusqu'à la composante connexe du niveau de la naissance où a lieu cette naissance. Si $5 \leq j \leq n-4$, il existe une homotopie $\{F_t | t \in I\}$ constante sur ∂D^2 , entre $F_0 \equiv F$ et une application F_1 de D^2 dans $\mathfrak{F}^0(W)$ (le graphique est donc comme sur la figure 20 (b)).

* Comparer à 2.2.4.

Remarques :

(1) Comme d'habitude, il peut exister au-dessus ou au-dessous du groupe de points critiques considéré d'autres points critiques auxquels n'arrive aucun accident.

(2) F est une famille à 1 paramètre de chemins d'élimination d'origine $F(0)$; le théorème affirme que le lacet de fonctions de Morse formé des extrémités des chemins de la famille est homotope à 0 dans sa strate, d'où le nom du théorème. Nous verrons au chapitre 5 que, même si W a beaucoup de connexité, il peut se faire que la famille de chemins d'élimination ne soit pas triviale ; autrement dit, il n'y a pas unicité forte des familles à 1 paramètre d'éliminations.

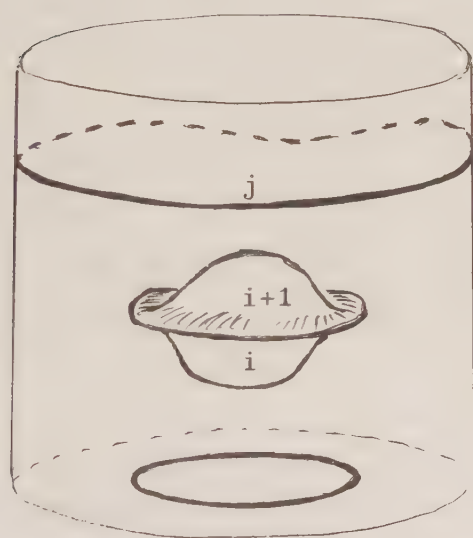
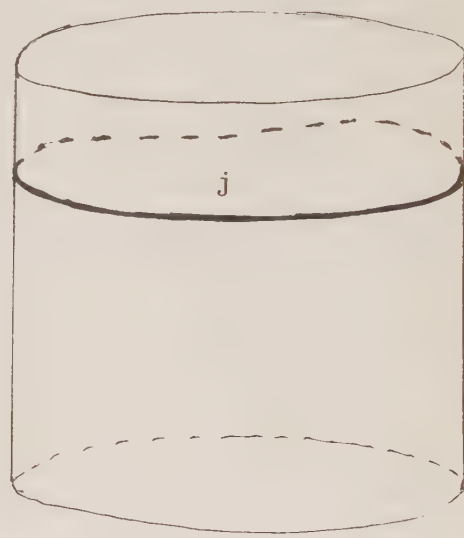


Figure 20
(graphiques)

(a)



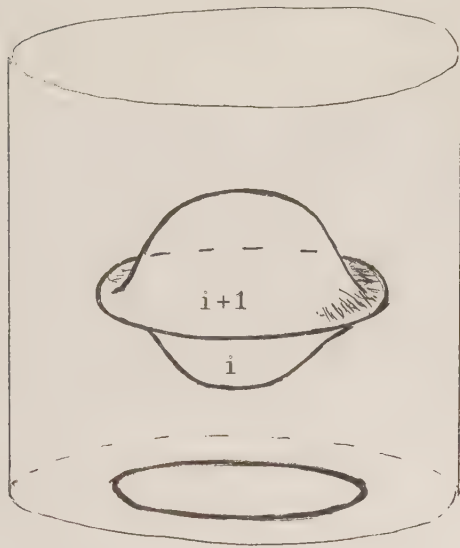
(b)

3.4.2 Théorème (lemme de translation des indices à 1 paramètre)[♦] :

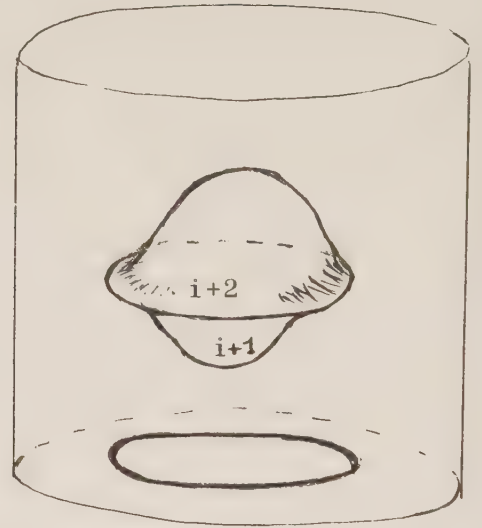
Soit $F: (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\mathfrak{F}(W), \mathfrak{F}^0(W))$ une application continue générique du disque dans l'espace des fonctions différentiables réelles définies sur une variété W de dimension $n+1$. On suppose que le graphique de F est comme sur la figure 21 (a). Si $n \geq 7$, $i \leq n-5$, il existe une homotopie $\{F_t | t \in I\}$

[♦] Comparer à 2.2.2.

constante sur ∂D^2 entre $F_0 \equiv F$ et une application F_1 de D^2 dans $\mathfrak{F}(W)$ dont le graphique est comme sur la figure 21 (b).



(a)



(b)

Figure 21
(graphiques)

3.4.3 Démonstration des théorèmes 3.4.1 et 3.4.2 :

Comme au chapitre 2, on commence par démontrer le théorème 3.4.1 pour $j = i+1$ (comparer au lemme 2.2.1) : la démonstration se lit sur la figure 22 :

L'étape I est triviale ; l'étape II est purement locale (existence de chemins en queue d'aronde issus d'une fonction ayant un point critique ; voir [4], chapitre IV, paragraphe 4). L'étape III est une conséquence immédiate du lemme d'unicité des naissances ([4], chapitre III, paragraphe 1.3), compte-tenu de l'hypothèse faite sur les nappes descendant du point critique d'indice $i+1$ de g (voir figure 22). Enfin, l'étape IV est une conséquence du théorème 3.2.1 et nécessite donc $n \geq 7$, $n-i \geq 5$.

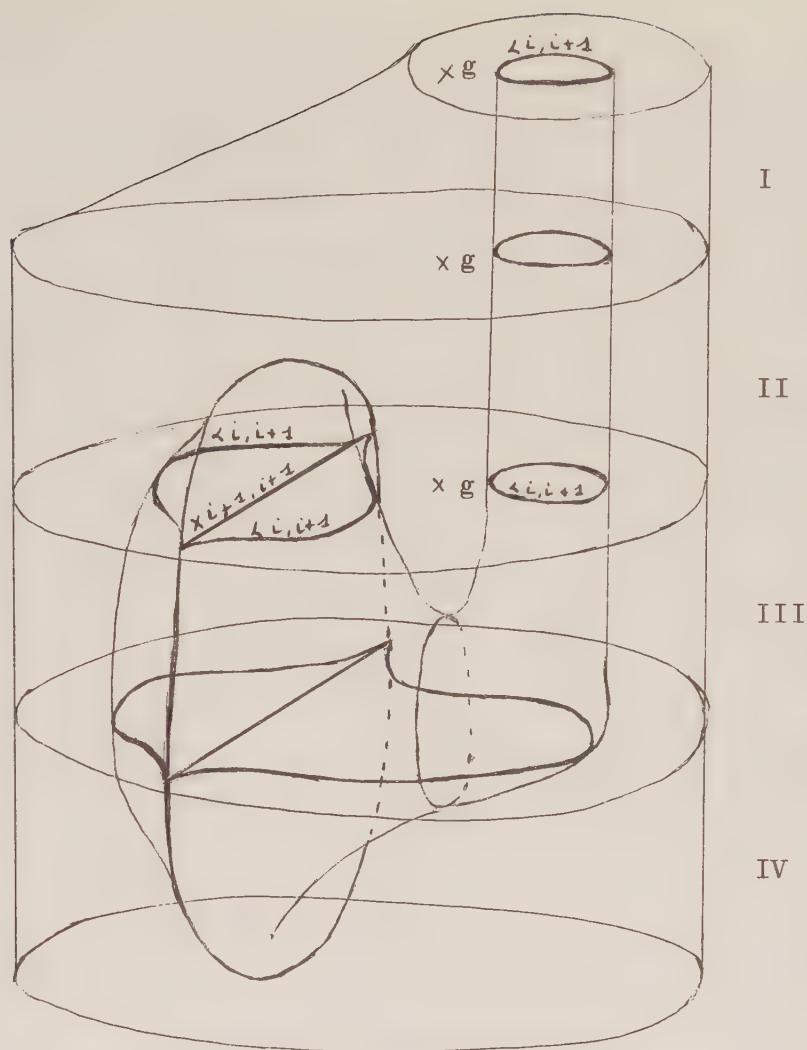


Figure 22 (stratification induite sur $D^2 \times I$ par $\{F_t | t \in I\}$)

On en déduit alors le théorème 3.4.2 par une démonstration analogue à la première démonstration du théorème 2.2.2 (on verra à la fin du chapitre 4 une démonstration du théorème 3.4.2 analogue à la deuxième démonstration du théorème 2.2.2). La stratification induite sur D^3 par l'homotopie $\{F_t | t \in I\}$ est représentée sur la figure 23 (comparer à la figure 18 du chapitre 2).

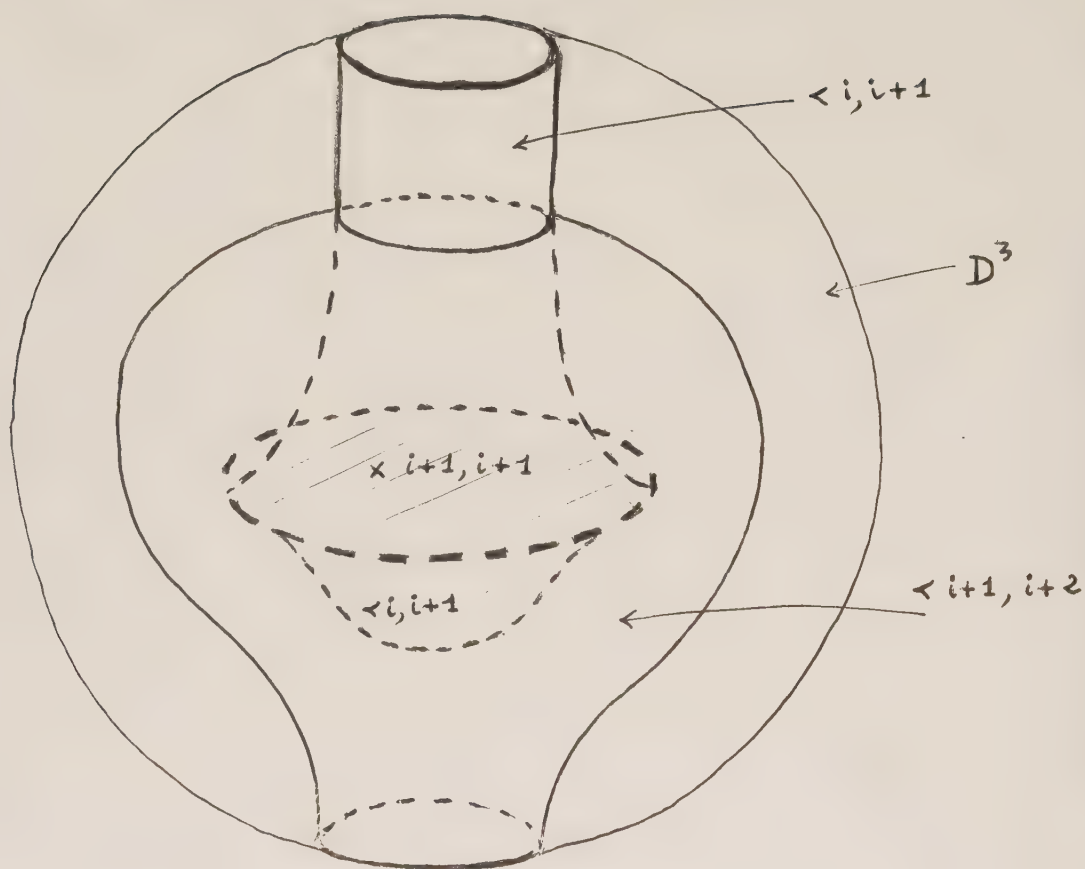


Figure 23

Enfin, le théorème 3.4.1 se démontre par un argument analogue à celui utilisé pour le théorème 2.2.4.

3.5 Philosophie des théorèmes d'unicité faible des éliminations et de translation des indices : la simplicité homotopique de l'espace des "chemins en queue d'aronde" :

3.5.1 On reprend les notations du paragraphe 3.3.4. Nous ne nous occuperons pas du cas où $i=0$, car on sait bien qu'alors le lemme d'unicité des morts (sous forme forte) est vrai sans condition de simple connexité.

Montrons par exemple comment démontrer directement le lemme 2.2.1 pour $1 \leq i \leq n-3$ à partir du corollaire 3.3.4 (connexité de l'espace des chemins en queue d'aronde) : rappelons qu'il existe un chemin G de fonctions issu de $F(\frac{1}{2})$ réalisant le croisement des deux points critiques d'indice $i+1$ de $F(\frac{1}{2})$ puis l'élimination avec le point critique d'indice i du point critique d'indice $i+1$ le plus bas. Les deux chemins $G^{-1} * (F|_{[0,1/2]})^{-1}$ et $G^{-1} * (F|_{[1/2,1]})$ sont des chemins en queue d'aronde d'origine notée h ; il suffit de se donner une homotopie entre eux dans l'espace des chemins en queue d'aronde d'origine h pour démontrer le lemme 2.2.1 (voir figure 24) :

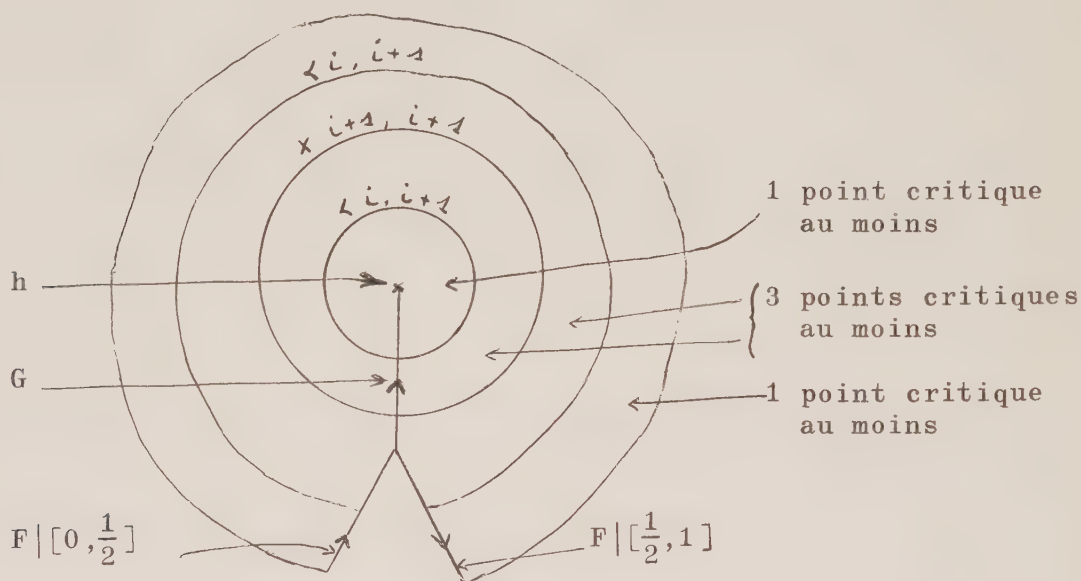


Figure 24

[Remarquons qu'on passe directement de l'homotopie décrite sur la figure 15 du chapitre 2 à l'homotopie ci-dessus en appliquant le théorème 3.3.1.]

Nous montrons sur la figure 24 bis la trace de la stratification de $\mathfrak{F}(W)$ sur un disque D^2 représentant une homotopie du type cherché dans le théorème 2.2.4. On a supposé sur la figure $1 \leq i \leq n-5$ et $j = i+3$.

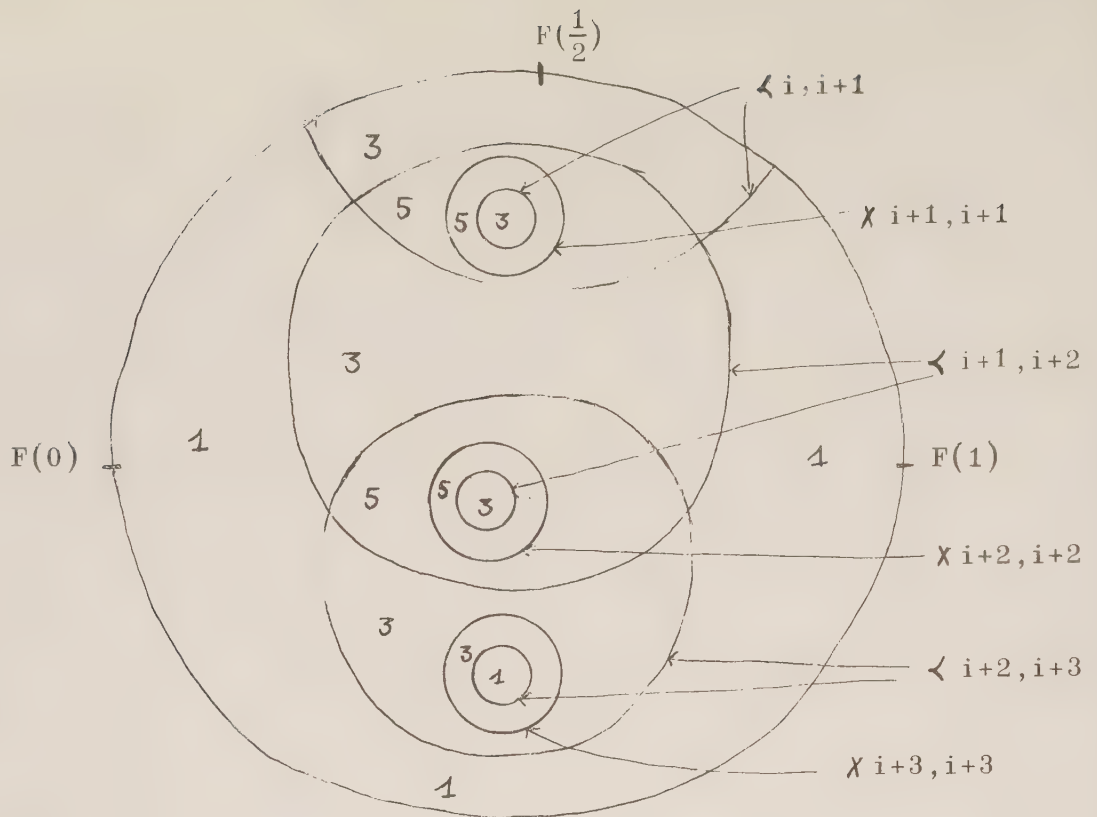


Figure 24 bis

[On a noté dans chaque composante le nombre de points critiques.]

On retrouve sur la figure 24 la raison du succès de la méthode utilisée dans [12] pour démontrer le lemme de translation des indices (théorème 2.2.2). En effet, on montre (par exemple en examinant la démonstration que donne Cerf du lemme de la queue d'aronde dans le cas simplement connexe) que le petit cercle de la figure 24 peut être supprimé. On en déduit que $(F|_{[0, 1/2]}) * \omega$ et $F|_{[1/2, 1]}$ sont homotopes dans l'espace des chemins d'élimination d'origine $F(\frac{1}{2})$, où ω est un lacet de fonctions de Morse, bord d'un "cône" dont les génératrices sont des chemins de croisement de deux points critiques de même indice $i+1$. On pourrait voir directement que les "cônes de croisement" de ce type sont classifiés par un invariant dans $(\mathbb{Z}_2 \times \pi_2(W))^{\pi_1(W)}$; on examinera cette situation plus en détail à la fin du chapitre 5.

3.5.2 Si on ajoute des paramètres, la situation ne change pas, au moins stablement^{*}. Le théorème 3.2.1 est encore valable pour des applications de D^k dans $\mathfrak{F}(W)$, $k > 2$, mais on ne sait plus démontrer l'analogie des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 si k devient trop grand ; aussi les conditions de dimension sont-elles très astreignantes ($n-2i \geq 2k+1$).

Par contre, on a toujours le théorème 3.3.1 dans d'aussi bonnes conditions : pour le voir, il faut utiliser les résultats du paragraphe 1.6 sur les familles élémentaires de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2$. Il nous reste à regarder la connexité du complexe de Kan $\widetilde{\mathcal{E}l}_h$ des familles élémentaires à 2 paramètres de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2$ issues d'une fonction h ayant un point critique d'indice $i+1$. La démonstration est à comparer à celle du paragraphe 1.5 :

Soit $\mathcal{P}_h$ l'espace des plongements du modèle de Morse^{♦♦} d'indice $i+1$ dans W adaptés à la fonction $h: W \rightarrow \mathbb{R}$ et à la fonction standard $-x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 - \theta(x) \varepsilon \lambda_0^2 x_{n+1}^2 - x_{n+1}^4/4$ sur le modèle (voir paragraphe 3.3.3).

$\mathcal{P}_h$ est fibré, par l'intermédiaire de son complexe singulier, sur le complexe de Kan $\widetilde{\mathcal{E}l}_h$, et la fibre a le type d'homotopie de $[0(i) \times 0(n-i)]^+$ (voir 1.6).

^{*} Ce paragraphe ne donne que des indications de démonstration ; on l'a inclus pour deux raisons :

- (1) montrer le rôle important joué par l'espace des chemins en queue d'aronde.
- (2) interpréter, au chapitre 5, les obstructions à l'unicité forte des éliminations à plusieurs paramètres.

^{♦♦} Voir note page 3.45.

D'autre part, $\mathcal{P}_h$ a le type d'homotopie de $SO(i+1, (n+1) - (i+1))$ (voir [4], appendice), et la suite exacte de la fibration $\mathcal{P}_h \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_h$ s'écrit

$$\dots \rightarrow \pi_k([0(i) \times 0(n-i)]^+) \rightarrow \pi_k(SO(i+1, n-i)) \rightarrow \pi_k(\widetilde{\mathcal{E}}_h) \rightarrow \pi_{k-1}([0(i) \times 0(n-i)]^+) \rightarrow \dots$$

Mais $SO(i+1, n-i)$ a le type d'homotopie de $[0(i+1) \times 0(n-i)]^+$, et la stabilisation $\pi_k(0(i)) \rightarrow \pi_k(0(i+1))$ est un isomorphisme pour $k \leq i-2$, et un épimorphisme pour $k = i-1$; on a donc $\pi_k(\widetilde{\mathcal{E}}_h) = 0$ pour $k \leq i-1$. On en déduit que, avec les notations du paragraphe 3.3.4, on a $\pi_k(Q(h, c)) = 0$ pour $k \leq i-1$, et $n-2i \geq 2(k-1) + 1 = 2k-1$ (il faut en effet le théorème d'unicité des apparitions à k paramètres et le théorème d'unicité des éliminations à $(k-1)$ paramètres ; compte-tenu du théorème 3.2.1, on a la simple connexité de $Q(h, c)$ pour $2 \leq i \leq n-5$.

On peut donc montrer, dans ces conditions de dimension, l'analogue à k paramètres du théorème de translation des indices ; en ce qui concerne le lemme d'unicité faible des éliminations sur un cobordisme élémentaire, nous n'obtenons qu'un résultat partiel dès que le nombre de paramètres est ≥ 2 ; en effet, pour démontrer ce lemme en toute généralité, il faut savoir translater les indices à la fois dans les deux sens, ce que nous ne savons pas faire, car les conditions de dimension seraient de la forme $i < \frac{n}{2}$ et $i > n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$; le lecteur rétablira sans peine les conditions dans lesquelles ce lemme reste valable[♦] : par exemple, la figure 24 est valable à k paramètres à condition de considérer qu'elle représente une boule de dimension $k+2$. Nous reverrons ce cas particulier important (unicité à paramètres des éliminations $(i, i+1)$ sur un cobordisme élémentaire d'indice $i+1$) à la fin du chapitre 5.



[♦] Nous conjecturons que l'on peut améliorer ce résultat, et obtenir pour $k \geq 2$ des conditions analogues à celles obtenues pour $k = 0, 1$.

CHAPITRE 4

L'OMBILIC HYPERBOLIQUE ET LA TRANSLATION DES INDICES

4.0 Ce chapitre, assez bref, contient des démonstrations moins détaillées que les précédents, et a surtout pour but de faire voir au lecteur certains des phénomènes qu'il vient de rencontrer sous un jour nouveau.

En ce qui concerne l'étude détaillée des singularités "ombilics" je renvoie à deux conférences [10] que j'ai faites au séminaire de R. Thom à l'I.H.E.S. et qui, je l'espère, paraîtront bientôt ; en attendant, on pourra se reporter à [27], et hypothétiquement à [28] (voir aussi [14] et [22]).

4.1 Description sommaire de l'ombilic hyperbolique :

Soit W une variété de dimension $n+1$; un point critique du type "ombilic hyperbolique d'indice i " (en abrégé O.H.(i)) d'une fonction $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ est un point critique c au voisinage duquel f s'écrit, dans des coordonnées locales convenables, sous la forme

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(c) + q(x_1, \dots, x_{n-1}) + x_n^3 + x_{n+1}^3, \quad ,$$

où q est une forme quadratique non dégénérée d'indice i à $(n-1)$ variables.

Au voisinage d'un tel point, un déploiement universel de f s'écrit

$$f(c) + q(x_1, \dots, x_{n-1}) + x_n^3 + x_{n+1}^3 + \lambda x_n x_{n+1} + \mu x_n + \nu x_{n+1}, \quad ,$$

ce qui montre que cette singularité est de codimension 3.

Au voisinage d'une fonction f ayant tous ses points critiques de Morse sauf un qui est du type 0.H., et tous ses niveaux critiques distincts, la stratification de l'espace $\mathfrak{F}(W)$ est localement triviale (conséquence d'un résultat très général de [23]) avec pour modèle transverse (notations du chapitre 1) un espace euclidien de dimension 3 stratifié comme sur la figure 1 (c'est la vague étudiée par E. C. Zeeman) ; la trace de cette stratification sur le bord d'une boule centrée sur l'0.H. est représentée sur la figure 2, ainsi que le graphique de la famille à 2 paramètres de fonctions qu'on obtient (élimination, dans deux directions différentes, d'une double queue d'aronde).

Enfin, sur la figure 3, on a représenté un cobordisme plongé dans $\mathbb{R}^2 \times I$ de telle façon que la fonction hauteur soit la fonction h "la plus complexe" dans le déploiement de f ; on a indiqué sur cette figure le système de nappes caractéristiques de l'0.H. (voir paragraphes suivants).

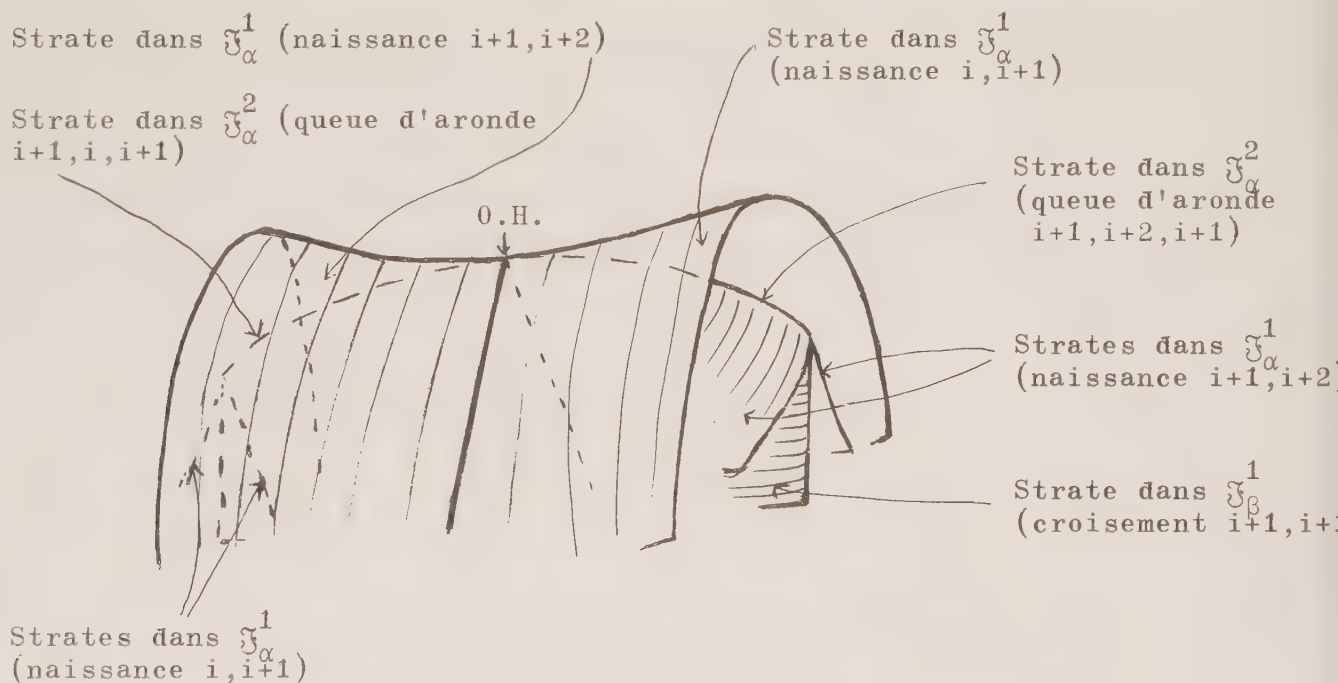


Figure 1

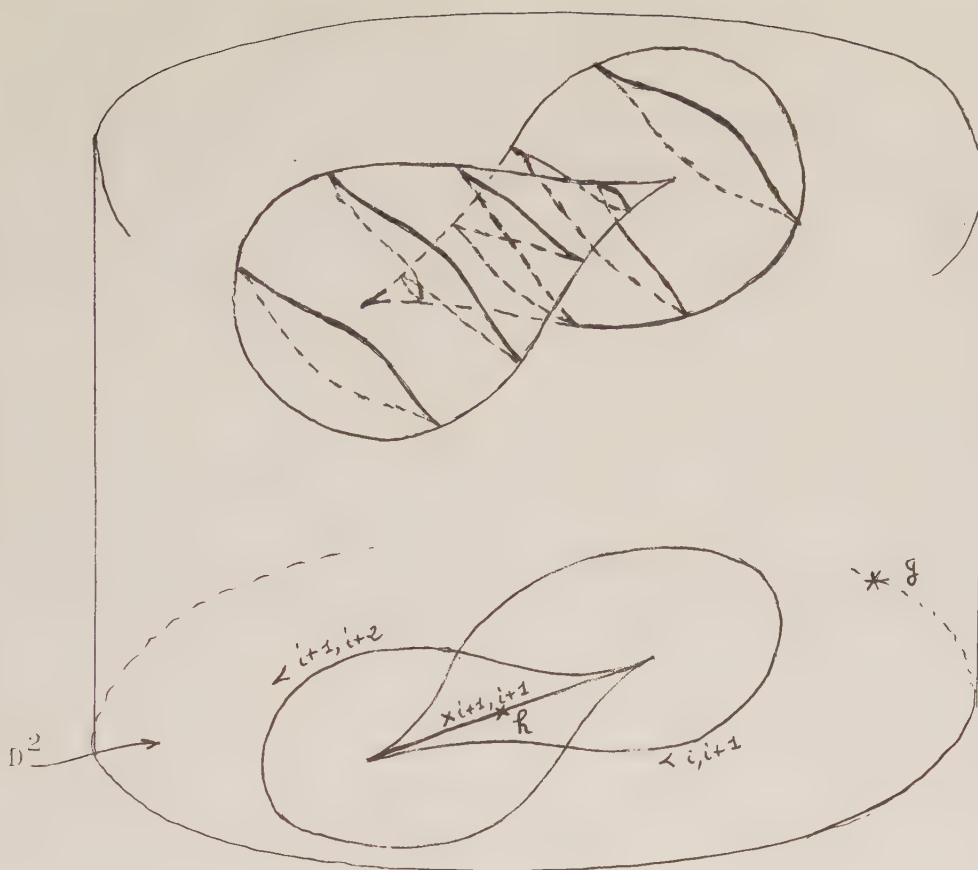


Figure 2 (graphique)

[On n'a représenté que le partie de S^2 difféomorphe à D^2 sur laquelle il se passe quelque chose.]

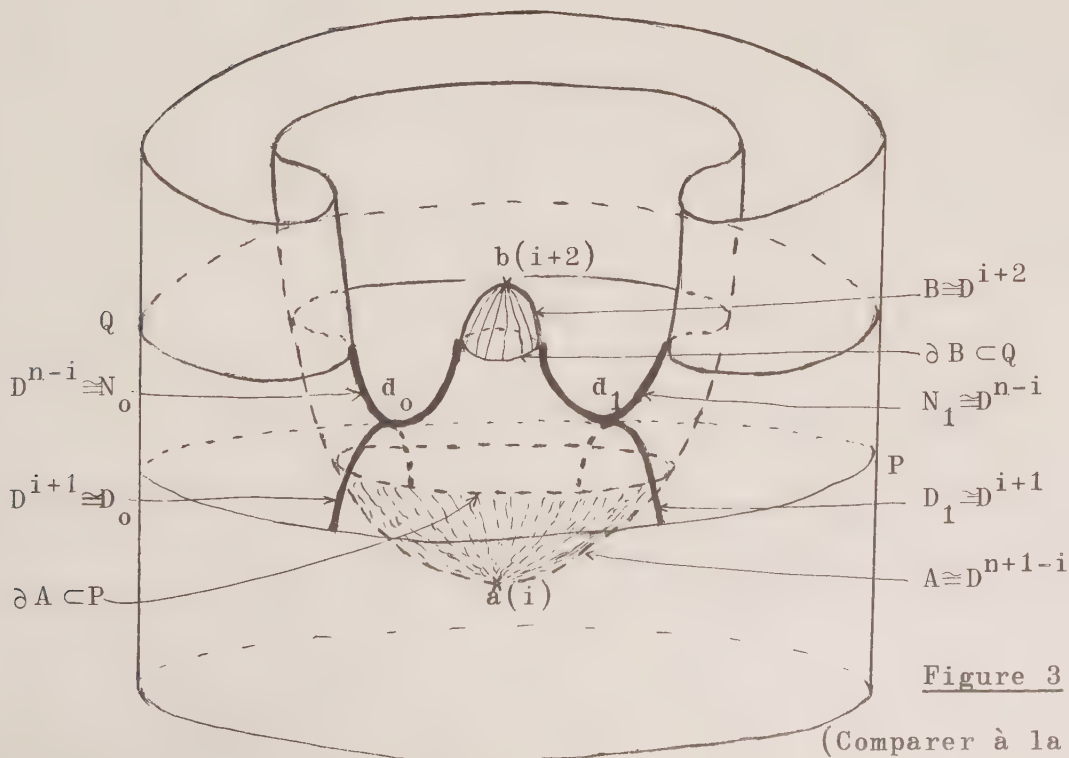


Figure 3

[h est la fonction hauteur.]

(Comparer à la figure 18 de [12])

4.2 Le lemme de l'ombilic hyperbolique :

4.2.1 Théorème : Soit $F: (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\mathfrak{F}(W), \mathfrak{F}^0(W))$ une application continue générique du disque dans l'espace des fonctions différentiables réelles définies sur une variété W de dimension $n+1$. On suppose que le graphique de F est comme sur la figure 2, les strates de codimension 1 et 2 rencontrées correspondant à quatre points critiques d'indices $i, i+1, i+1, i+2$ de $F(0) = h$.

Si $n \geq 7$ et $i \leq n-5$ (resp. $n \geq 7$ et $i \leq 4$), il existe une homotopie F_t constante sur ∂D^2 , d'origine $F_0 \equiv F$ et d'extrémité une application $F_1: D^2 \rightarrow \mathfrak{F}^0(W) \cup \mathfrak{F}^1(W)$ dont le graphique est comme sur la figure 4 [famille à 1 paramètre de chemins d'élimination d'un couple de points critiques d'indices $(i+1, i+2)$ (resp. d'indices $(i, i+1)$)].

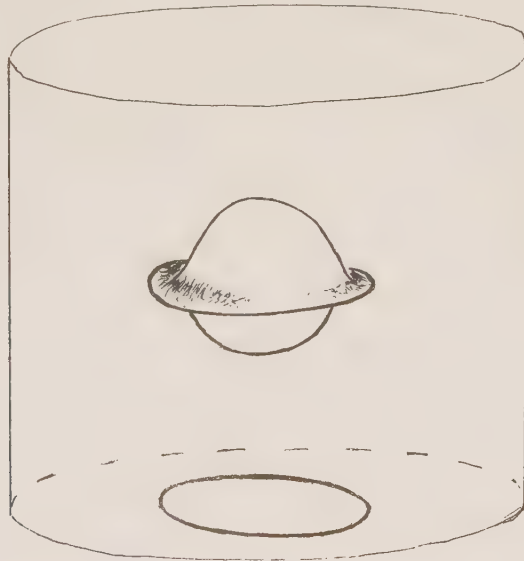


Figure 4 (graphique)

4.2.2 Démonstration du théorème 4.2.1 à partir du théorème 3.2.1 :

On commence par montrer qu'étant donné une fonction $g: W \rightarrow \mathbb{R}$, on peut toujours trouver une application $\Phi: (D^3, x) \rightarrow (\mathfrak{F}(W), g)$ avec $x \in \partial D^3$, qui soit une carte transverse d'une strate dans $\mathfrak{F}^3(W)$ formée de fonctions

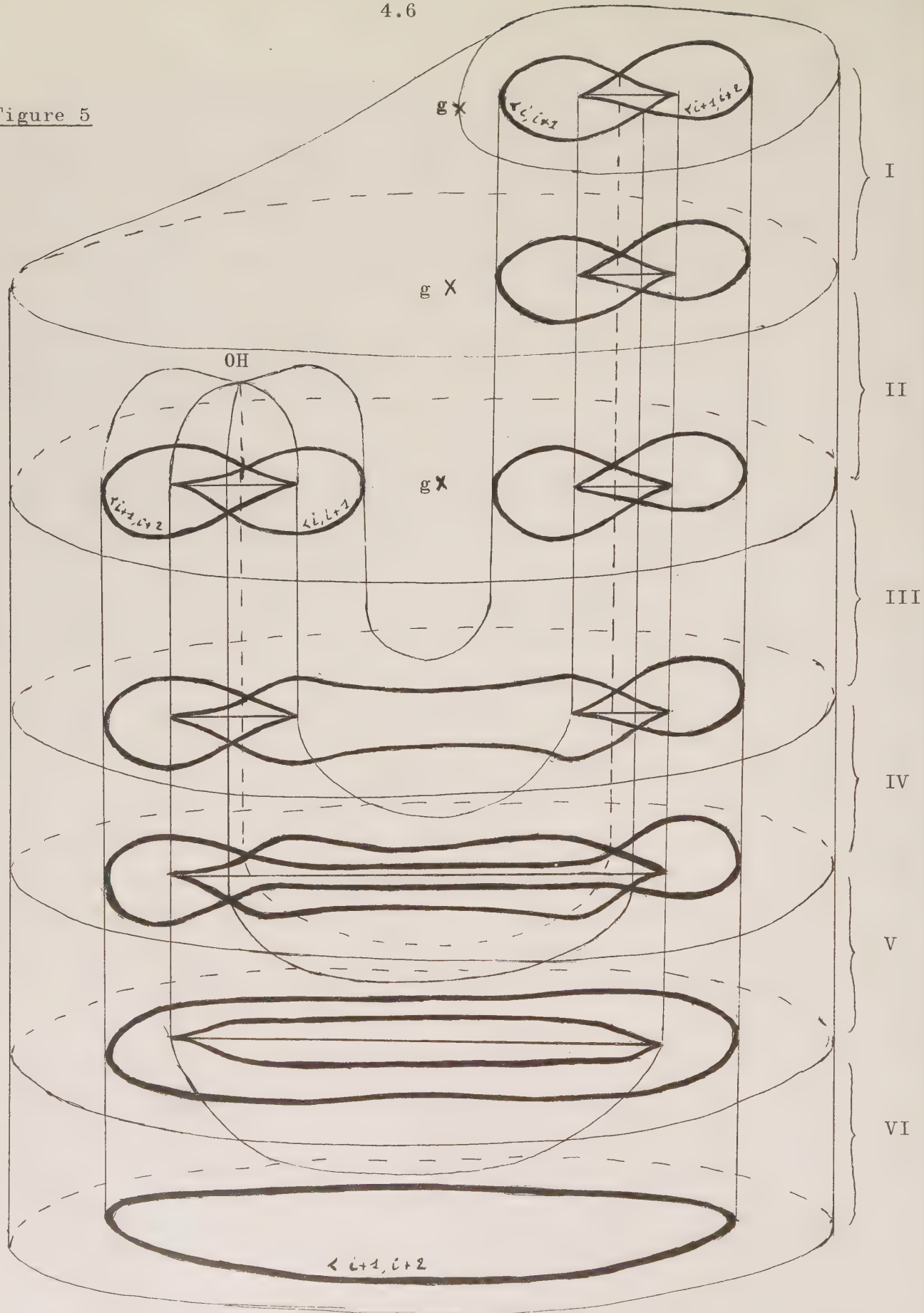
ayant un point critique du type O.H.(i). Il suffit de choisir un niveau non critique de g , un plongement de $D^n \times I$ dans W adapté à g au voisinage de ce niveau et à la fonction projection $D^n \times I \rightarrow I$, et de définir dans la boule $D^n \times I$ une famille à 3 paramètres de fonctions coïncidant avec la projection sur I au voisinage du bord de $D^n \times I$, et avec un déploiement universel de l'ombilic hyperbolique au voisinage du centre de $D^n \times I$.

Pour cela, on utilise le déploiement donné au paragraphe 4.1, pondéré par une fonction en cloche, et on applique le théorème des fonctions implicites pour passer d'une fonction sans point critique à la fonction projection sur une coordonnée.

Nous allons indiquer maintenant les différentes étapes de la construction de l'homotopie F_t dans le théorème 4.2.1 (voir figure 5).

L'étape I est inoffensive, et on vient de voir comment réaliser l'étape II en appliquant la remarque ci-dessus à la fonction g sans point critique indiquée sur les figures 2 et 5. L'étape III est une conséquence facile du lemme d'unicité des naissances, déjà utilisée au chapitre 3. L'étape IV est possible si $i \neq 0$ à cause de l'unicité de l'apparition des queues d'aronde (théorème 3.3.1) ; si $i = 0$, c'est encore possible en faisant au besoin une symétrie sur le déploiement de l'O.H. qu'on a choisi dans l'étape II. L'étape VI est possible si $n \geq 7$, $i \leq n-5$ à cause de l'unicité de l'élimination des queues d'aronde (théorème 3.2.1). Seule reste à examiner l'étape V, c'est-à-dire en fait la possibilité de trouver une homotopie rel. le bord entre une application de D^2 dans $\mathfrak{F}(W)$ comme sur la figure 6 (a) et une application comme sur la figure 6(b).

Figure 5



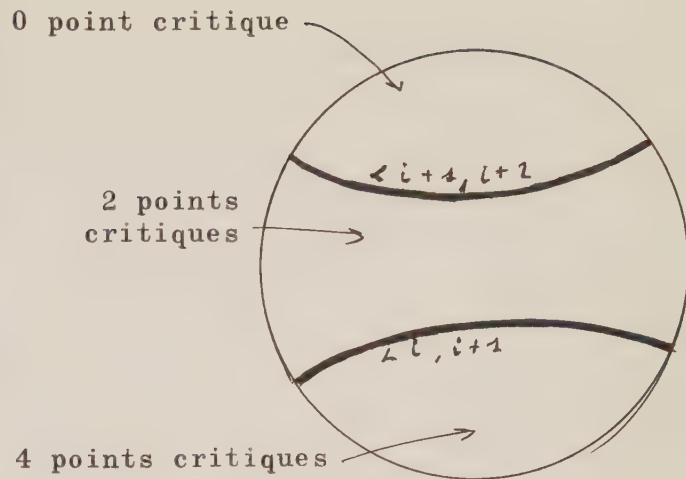
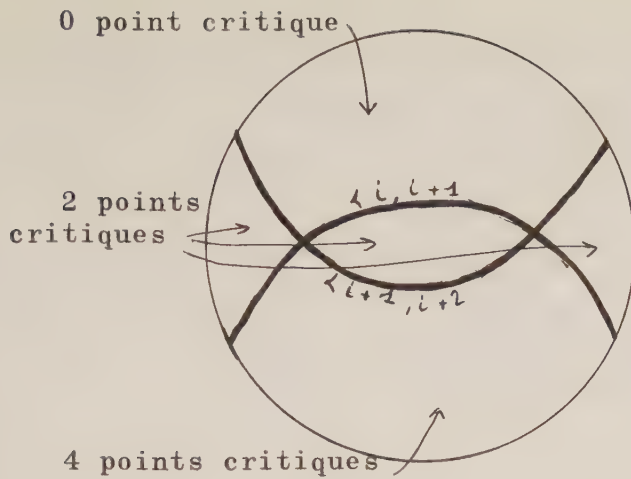


Figure 6

(a)

(b)

On démontre ceci par un raisonnement qui ressemble à la démonstration du théorème 3.2.1 (en plus simple) où "famille élémentaire à 2 paramètres de traversée de $\mathfrak{F}_\alpha^2$ " est remplacé par famille élémentaire à 2 paramètres de traversée d'une strate de fonctions ayant deux naissances en même temps" (pour définir une telle famille, il suffit de savoir ce qu'est un chemin élémentaire de naissance (resp. d'élimination)). La seule condition est de pouvoir séparer un voisinage d'un segment de dimension 1 (correspondant à une famille à un paramètre de chemins élémentaires de naissance) d'une famille à 1 paramètre de disques de dimension $i+1$ (nappes descendantes correspondant à une famille à 1 paramètre de chemins d'élimination), c'est-à-dire $(i+1+1)+1 < n+1$, ou encore $i \leq n-3$.

Le théorème 4.2.1 est ainsi démontré (si on veut obtenir une famille à 1 paramètre de chemins d'élimination d'un couple de points critiques d'indices $(i, i+1)$, on remplace toutes les fonctions f qui interviennent par $1-f$, ce qui donne la condition $n \geq 7$, $n-i-1 \leq n-5$, c'est-à-dire $n \geq 7$, $i \geq 4$).

4.2.3 Démonstration directe du théorème 4.2.1 (esquisse) :

Remarquons tout d'abord que la démonstration de la section précédente entraîne, si $n \geq 7$, $i \leq n-5$, l'existence d'une homotopie rel. le bord entre une application de D^2 dans $\mathfrak{F}(W)$ comme sur la figure 7 (a), et une application comme sur la figure 7 (b) (pour être tout à fait précis, il faudrait

donner les graphiques, mais le lecteur les rétablira lui-même).^{*} C'est sous cette forme que nous allons esquisser la démonstration directe du théorème 4.2.1 (qui encore une fois s'inspire du lemme de Cancellation de Smale).

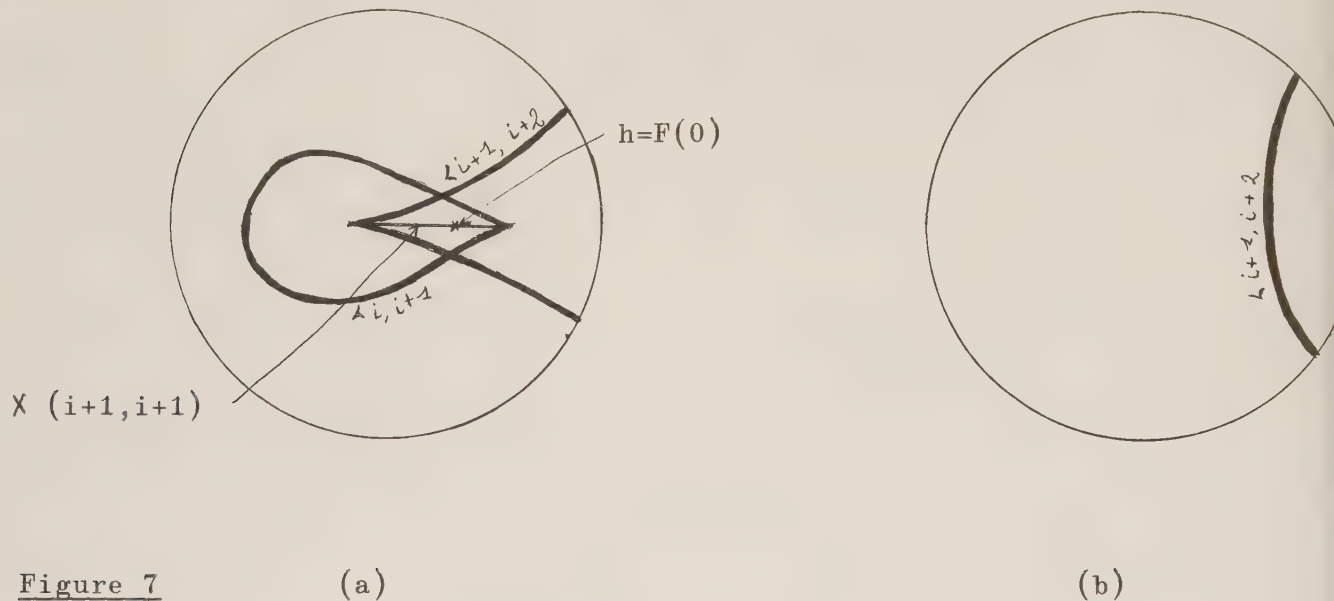


Figure 7

(a)

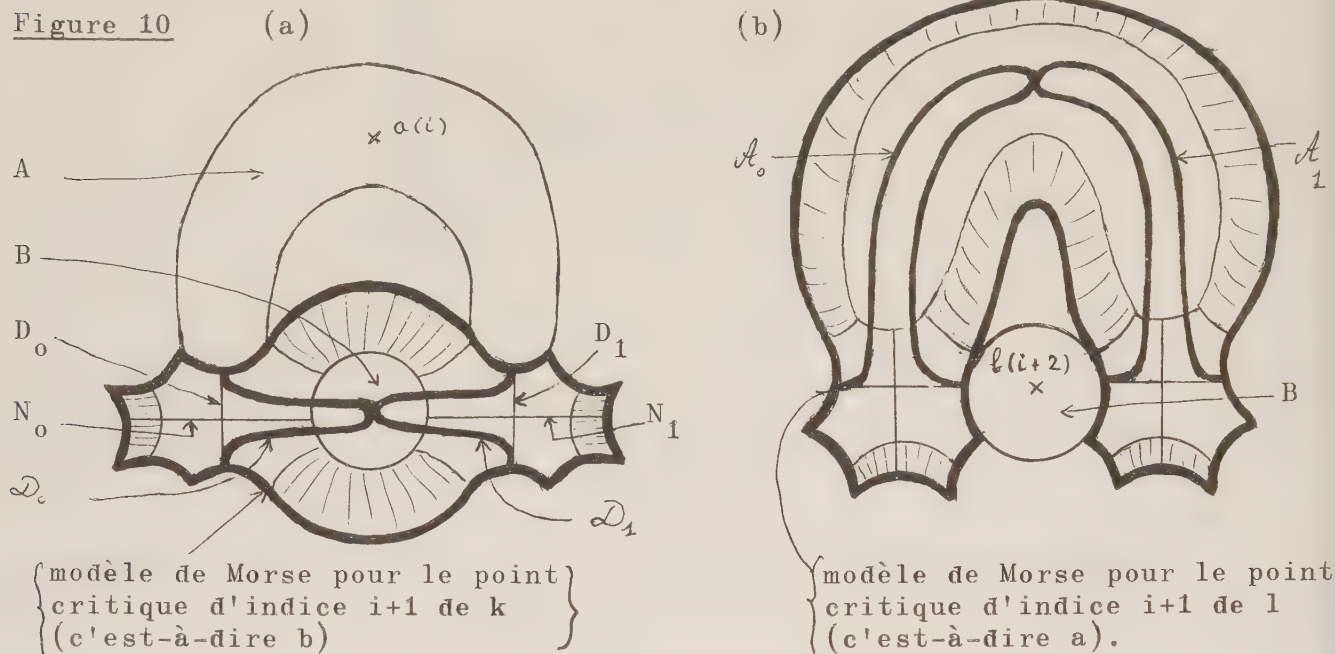
(b)

On commence par se ramener à la situation suivante : la restriction de F à chacun des quatre secteurs indiqués sur la figure 8 définit une famille élémentaire à 2 paramètres de traversée de $\mathfrak{F}^2$, et toutes ces familles sont déterminées par la donnée d'un système de six nappes A, N_0, N_1, D_0, D_1, B adaptées à la fonction $h = F(0)$ et disposées comme sur la figure 2 ; cela signifie que (N_0, D_0) et (N_1, D_1) sont des binappes issues respectivement de d_0, d_1 , et que les couples $(B, N_0), (B, N_1), (D_0, A), (D_1, A)$ sont en bonne position. Si $i \leq n-3$, on peut de plus supposer que les triples (N_0, B, N_1) et (D_0, A, D_1) sont en bonne position, ce qui permet de construire une métrique riemannienne $\mathfrak{M}$ sur W pour laquelle toutes ces nappes soient des

^{*} Il y a bien entendu un énoncé analogue où on remplace $i \leq n-5$ par $i \geq 4$, et où on intervertit dans les figures 7 (a) et 7 (b), les couples d'indices $(i, i+1)$ et $(i+1, i+2)$.

On montre alors que les chemins d'élimination d'origine k (resp. l) indiqués sur la figure 8 sont homotopes à des chemins élémentaires associés à des couples de nappes que l'on sait construire explicitement. Nous nous contenterons de l'examen du cas particulier de la figure 10 :

Figure 10



$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_k^0 \text{ (resp. } \varepsilon_k^1 \text{) est "associé" à } (\mathcal{D}_0, A) \text{ (resp. } (\mathcal{D}_1, A) \text{) ;} \\ \varepsilon_l^0 \text{ (resp. } \varepsilon_l^1 \text{) est "associé" à } (B, \mathcal{A}_0) \text{ (resp. } (B, \mathcal{A}_1) \text{) .} \end{array} \right]$$

Pour la construction de $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ dans le cas général, on utilise des voisinages tubulaires des nappes dont on dispose.

Maintenant, le fait que la famille de fonctions représentée sur la figure 8 soit une partie de la famille représentée sur la figure 7 (a) dit exactement que les deux chemins d'élimination ε_k^0 et ε_k^1 issus de k sont homotopes dans l'espace des chemins d'élimination d'origine k : il existe donc une homotopie dans l'espace des nappes descendant du point critique d'indice $i+1$ de k , adaptées à k , et en bonne position par rapport à A , entre $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$.

Ce fait va nous permettre de plonger dans W un voisinage saturé du sextuplet de nappes $(B, N_0, N_1, D_0, D_1, A)$ (voir figure 12) qui sera difféomorphe à une boule D^{n+1} , et dans lequel on pourra définir une famille à 3 paramètres de fonctions par transport d'un déploiement universel de l'ombilic hyperbolique défini sur un modèle (comme pour le lemme de Cancellation et le lemme de la queue d'aronde, il suffira de vérifier qu'il existe des voisinages saturés assez grands dans le modèle pour contenir le support d'une déformation standard, ce qui ne présente aucune difficulté).

Remarquons tout d'abord que pour la métrique riemannienne $\mathfrak{M}$ définie plus haut, le saturé du système des six nappes $(B, N_0, N_1, D_0, D_1, A)$ n'a aucune raison d'être contractible (c'est la première fois qu'un tel phénomène apparaît ; cela tient au fait que la réunion des six nappes considérées a de l'homotopie, en l'occurrence un groupe fondamental non nul).

En effet, l'intersection avec la variété intermédiaire P (voir figure 3) des lignes de gradient descendantes issues du point critique b est difféomorphe à $S^i_X \cap I$, et est bordée par l'intersection avec P des lignes de gradient descendantes issues des points critiques d_0 et d_1 , qui est difféomorphe à $S^i_X \cap I$. L'obstruction à ce que (à homotopie près du système de nappes) cette intersection rencontre le bord $\partial A \subset P$ de la nappe A suivant l'image d'un segment, est un élément $\delta \in \pi_1^{\text{rel } \partial A}(\text{Plgt}(S^i, P); \varphi_0)$ (notations du § 1.4.6) où φ_0 est un paramétrage du bord de D_0 dans P . On a vu dans [12] que ce groupe n'est en général pas trivial dès que $\pi_1(P) \neq \{0\}$.

De même, l'intersection avec la variété intermédiaire Q des lignes de gradient ascendantes issues du point critique a est difféomorphe à $S^{n-i-1}_X \cap I$, et est bordée par l'intersection avec Q des lignes de gradient ascendantes issues des points critiques d_0 et d_1 , qui est difféomorphe à $S^{n-i-1}_X \cap I$; l'obstruction à ce que (à homotopie près du système de nappes) cette intersection rencontre le bord $\partial B \subset Q$ de la nappe B suivant l'image d'un segment, est un élément $\alpha \in \pi_1^{\text{rel } \partial B}(\text{Plgt}(S^{n-i-1}, Q); \psi_0)$, où ψ_0 est un paramétrage du bord de N_0 dans Q .

L'existence d'une homotopie entre les chemins d'élimination ε_k^0 et ε_k^1 se traduit exactement par la nullité de l'obstruction δ .

On utilise alors le théorème 3.1.2, dès que $n \geq 7$, $i \leq n-5$, pour prolonger le système de nappes $(B, N_0, N_1, D_0, D_1, A)$ en un système de nappes saturées difféomorphe au système standard obtenu en prenant la métrique euclidienne dans le modèle défini au paragraphe 4.1 (les diverses nappes sont relatives à la fonction h standard représentée sur les figures 2 et 3). Il existe alors une métrique riemannienne pour laquelle ce système saturé est l'ensemble des lignes de gradient issues de b, d_0, d_1, a , et limitées aux niveaux de a et b (voir figure 11).

On peut maintenant considérer le voisinage saturé pour cette métrique du sextuple de nappes $(B, N_0, N_1, D_0, D_1, A)$ limité à un niveau légèrement inférieur à celui de a et un niveau légèrement supérieur à celui de b (voir figure 12). Ce "voisinage sextuple saturé" est difféomorphe à un voisinage sextuple saturé standard contenant le support de la déformation standard à 3 paramètres (déploiement de l'O.H.(i)).

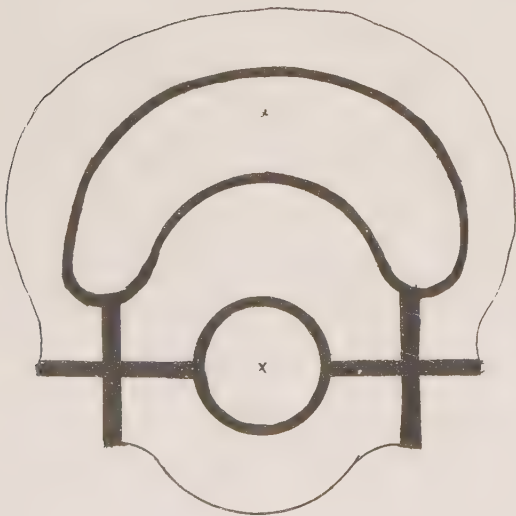


Figure 11

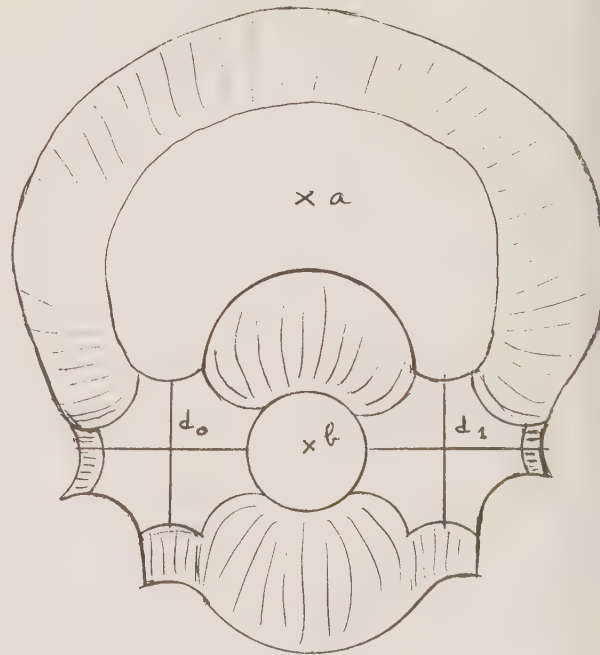


Figure 12

La fin de la démonstration utilise des arguments identiques à ceux utilisés pour la fin de la démonstration du théorème 3.2.1 ; on arrive à la conclusion qu'il existe une application de D^3 dans $\mathfrak{F}(W)$, coïncidant sur un hémisphère avec l'application F de la figure 7 (a), et réalisant un déploiement de l'ombilic hyperbolique. Sur l'autre hémisphère on a donc une application comme sur la figure 7 (b), et le théorème est démontré (remarquons que ceci implique en particulier la nullité de l'obstruction α)

4.3 Applications à la translation des indices :

4.3.1 Conservation de l'obstruction à 0 paramètre :

La figure 8 représente une application de D_+^2 dans $\mathfrak{F}(W)$ qui, si on la considère comme une homotopie entre ses restrictions aux deux parties du bord du demi-disque D_+^2 , réalise une translation des indices (voir chapitre 2, paragraphe 2.2). Une des conséquences du théorème 4.2.1 est que, si $n \geq 7$, et $i \geq 4$, et si les chemins d'élimination ε_1^0 et ε_1^1 sont homotopes à travers de tels chemins, il en est de même des chemins ε_k^0 et ε_k^1 , ce qui montre qu'on ne peut pas, par une telle translation, transformer deux chemins non homotopes en deux chemins homotopes.

Plus précisément, on peut voir dans la démonstration donnée dans la section 4.2.3, que les obstructions α et δ sont égales au signe près (elles habitent dans le même groupe dès que $3 \leq i \leq n-4$) et qu'elles représentent respectivement les obstructions à trouver une homotopie entre ε_1^0 et ε_1^1 d'une part, ε_k^0 et ε_k^1 d'autre part (comparer à [12], paragraphe 3.6 où on montre ce résultat directement pour $3 \leq i \leq n-4$).

4.3.2 Translation des indices à 1 paramètre :

Le lemme de l'ombilic hyperbolique peut s'interpréter comme un lemme de translation des indices pour des familles à 1 paramètre de chemins d'élimination. Il suffit, pour s'en convaincre, de contempler l'homotopie

décrite sur la figure 13 (les trois premières étapes sont analogues à celles de la figure 5 ; la dernière est donnée par le théorème 4.2.1 si $n \geq 7$, $i \leq n-5$). (Comparer au théorème 3.4.2 et à la figure 23 du chapitre 3).

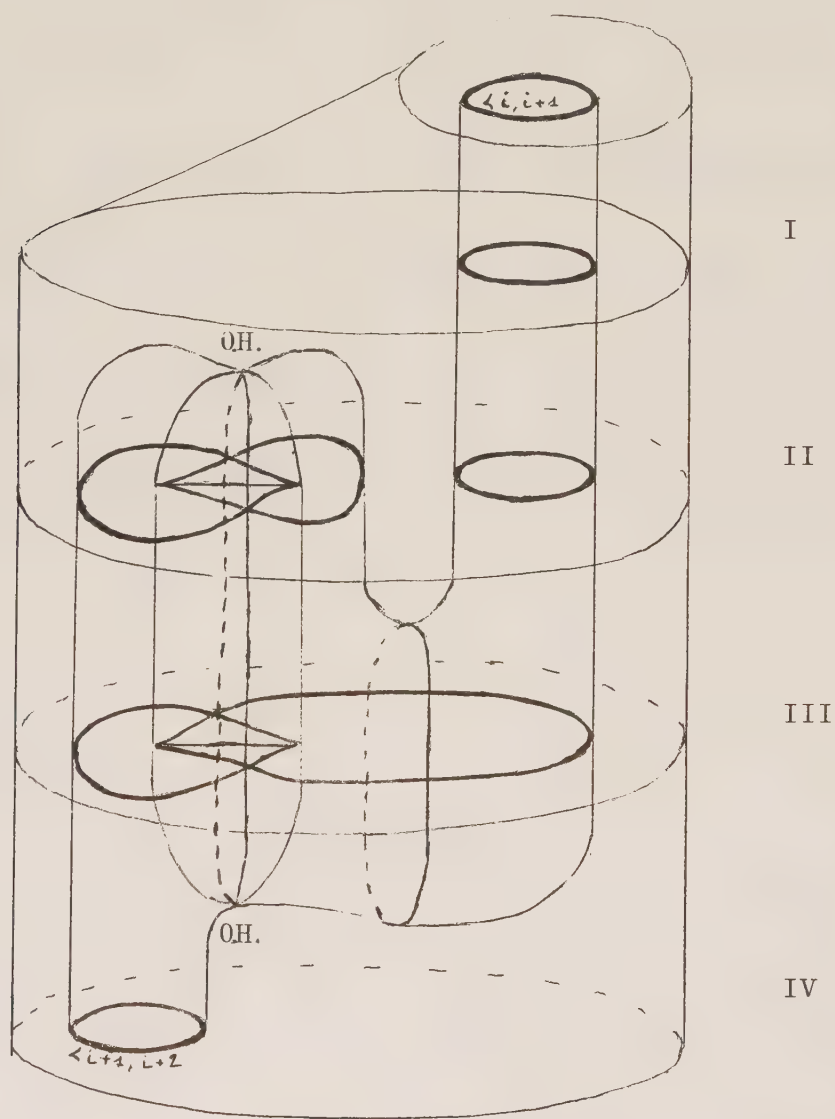


Figure 13



CHAPITRE 5

NON UNICITE, A PLUSIEURS PARAMETRES, DE
L'ELIMINATION D'UN COUPLE DE POINTS CRITIQUES

5.0 Soit $h: W^{n+1} \rightarrow I$ une fonction de Morse excellente, c_1 et c_2 deux points critiques de h , d'indices respectifs i et $i+1$, en position de s'éliminer (voir chapitre 1), et M^n une variété de niveau de h intermédiaire pour le couple (c_1, c_2) . Rappelons que $\mathcal{C}(h) \equiv \mathcal{C}(h, c_1, c_2)$ désigne l'espace (muni de la topologie C^0) des "bons chemins" d'origine h qui réalisent l'élimination de c_1 et c_2 , et que ε_0 est un chemin élémentaire d'élimination choisi comme point-base. Dans ce chapitre, nous utilisons l'isomorphisme de $\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h); \varepsilon_0)$ sur $\pi_k^{\text{rel } T^0}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0)$ décrit dans le § 1.4.7 pour montrer que $\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h); \varepsilon_0)$ n'est en général pas trivial pour $2 \leq k$, ceci indépendamment de la connexité de la variété intermédiaire M . Dans le paragraphe 5.1 nous étudions en détail le cas où $k=2$; le résultat principal en est le théorème 5.1.9 qui donne un isomorphisme de $\pi_1(\mathcal{C}(h); \varepsilon_0)$ sur $\mathbb{Z}_2$, à condition que $\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$ et $4 \leq i \leq n-4$. Dans le paragraphe 5.2 on étudie le cas général; on montre que, moyennant de bonnes hypothèses sur k, i, n , $\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h); \varepsilon_0)$ ne dépend des $\pi_j(M)$ que pour $j \leq k+1$; si tous les groupes d'homotopie de M sont nuls jusqu'à la dimension k et si $k+2 \leq i \leq n-(k+2)$, $n \geq 6k+1$, on trouve un isomorphisme de $\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h); \varepsilon_0)$ sur $\text{coker } J_k \oplus \ker J_{k-1}$, où $J_k: \pi_k(SO(i)) \rightarrow \pi_{i+k}(S^i)$ est le J -homomorphisme (théorème 5.2.8). Il semble que ce soit A. Douady qui, dans la première démonstration qu'il a faite du "lemme d'unicité des morts", ait vu le rôle joué par la surjectivité de $J_1: \pi_1(SO(i)) \rightarrow \pi_{i+1}(S^i)$. Dans le bref paragraphe 5.3, nous revenons sur la généralisation à k paramètres du théorème d'unicité faible des éliminations sur un cobordisme élémentaire (voir paragraphe 3.5.2) et en donnons une interprétation assez plaisante en termes de l'homotopie des différentes cocellules voisines de h . Enfin, ce chapitre finit par la définition du morphisme

$$E: \text{Coker } J_k \oplus \ker J_{k-1} \rightarrow \pi_{k-1}(\text{Diff}(S^n \times I, S^n \times 0))$$

annoncé dans l'introduction qui semble être bon candidat pour démontrer l'existence d'éléments exotiques dans les premiers groupes d'homotopie de l'espace des difféomorphismes du disque D^{n+1} .

5.1 Etude de $\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h); \varepsilon_o)$ pour $k = 2$.

Un élément $\alpha \in \pi_2^{\text{rel } T_o}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_o) \cong \pi_1(\mathcal{C}(h); \varepsilon_o)$ est représenté par une application lisse $F: S^i \times D^2 \rightarrow M$, transversale sur T_o , et telle que

- (1) Pour tout point $t \in D^2$, $F|_{S^i \times \{t\}}$ est un plongement,
- (2) Pour tout point $t \in \partial D^2$, $F(S^i \times \{t\})$ rencontre T_o transversalement et en un seul point.

Si $C \subset D^2$ est un voisinage collier de ∂D^2 , C est naturellement isomorphe à $S^1 \times I$, et on peut exiger que pour tout $u \in I$, la restriction de F à $S^i \times S^1 \times \{u\}$ soit indépendante de u .

La surface indicatrice (notation du paragraphe 3.1) $F^{-1}(T_o) \subset S^i \times D^2$ est une variété orientable de dimension 2 dont le bord $\partial F^{-1}(T_o)$ est difféomorphe à S^1 , et $S^i \times C \cap F^{-1}(T_o)$ est un voisinage collier de $\partial F^{-1}(T_o)$ dans $F^{-1}(T_o)$.

Puisque T_o est le bord d'une anse, le fibré normal $\nu(T_o; M)$ est canoniquement trivialisé (à l'orientation près) ; par transversalité, on en déduit une trivialisation canonique ρ de $\nu(F^{-1}(T_o); S^i \times D^2)$.

5.1.1 Proposition : Si $i \geq 3$, $F^{-1}(T_o)$ muni de la trivialisation ρ est normalement cobordant rel. le bord dans $S^i \times D^2$ à une sous-variété difféomorphe à la réunion disjointe d'un disque D^2 et d'une variété sans bord.

Démonstration : Soit $f: S^1 \rightarrow \text{int } F^{-1}(T_o)$ le paramétrage naturel de $F^{-1}(T_o) \cap S^i \times S^1 \times \{\frac{1}{2}\} \subset F^{-1}(T_o) \cap S^i \times C$. Si p_2 est la projection de $S^i \times D^2$ sur D^2 , la composée $p_2 f$ est l'identité de S^1 sur $S^1 \times \{\frac{1}{2}\} \subset C \subset D^2$; on en déduit que f se prolonge en une application $f_1: D^2 \rightarrow S^i \times \text{int } D^2$; si $i \geq 3$, on peut supposer que f_1 est un plongement dont l'image ne rencontre $F^{-1}(T_o)$ que suivant $f(S^1)$ (où il y a transversalité). On note $(\rho_1, \dots, \rho_i)$ un champ de i -repères normaux à $F^{-1}(T_o)$ dans $S^i \times D^2$ qui définit ρ et on suppose que la restriction de ρ_1 à $f(S^1)$ est un champ rentrant dans $f_1(D^2)$.

L'obstruction à la "chirurgie trivialisée" sur $f(S^1)$ avec ces données, est celle à prolonger la restriction à $f(S^1)$ du champ de $(i-1)$ -repères $(\rho_2, \dots, \rho_i)$ en un champ normal à $f_1(D^2)$ dans $S^i \times D^2$. (Voir [15] et [9]; dans [9] nous avons employé pour ce concept le nom de chirurgie plongée. Dans cet article nous appellerons obstruction à la "chirurgie plongée" l'obstruction à prolonger une trivialisat[i]on donnée de $v(f(S^1); F^{-1}(T_0))$ en un champ de repères normaux à $f_1(D^2)$ dans $S^i \times D^2$; il est clair que la possibilité de faire une chirurgie trivialisée implique la possibilité de faire une certaine chirurgie plongée).

Si cette obstruction est toujours nulle, on a démontré la proposition 5.1.1; or ceci découle de la remarque suivante qui permet de se ramener à un cas particulier.

1.1.2 Lemme : Deux trivialisations du fibré normal de $F^{-1}(T_0)$ dans $S^i \times D^2$ induisent des trivialisations homotopes de la restriction à $f(S^1)$ de ce fibré.

Démonstration : Si $\tau_1, \tau_2 : F^{-1}(T_0) \times \mathbb{R}^i \rightarrow v(F^{-1}(T_0); S^i \times D^2)$ sont deux telles trivialisations, l'application composée $\tau_2^{-1} \tau_1$ définit une classe d'homotopie $u \in [F^{-1}(T_0), SO(i)]$; la composante connexe de $f(S^1)$ dans $F^{-1}(T_0)$ est un tore à p trous privé d'un disque, et la classe de $f(S^1)$ dans l'abélianisé de $[S^1, F^{-1}(T_0)]$ est nulle. L'image de u dans $[S^1, SO(i)] \cong \mathbb{Z}_2$ est donc nulle, ce qui démontre le lemme.

Il ne nous reste plus qu'à exhiber une trivialisat[i]on $(\rho_1, \dots, \rho_i)$ de $v(F^{-1}(T_0); S^i \times D^2)$ pour laquelle l'obstruction à la chirurgie trivialisée sur $f(S^1)$ soit nulle. Si on se fixe ρ_1 et $f_1(D^2)$, l'unique trivialisat[i]on (pour des raisons de dimension) de $v(f(S^1); F^{-1}(T_0))$ se prolonge en un champ normal à $f_1(D^2)$ dans $S^i \times D^2$ dès que $\pi_1(S^{i-1}) = 0$, c'est-à-dire $i \geq 3$; on peut donc modifier $F^{-1}(T_0)$ par une "chirurgie plongée" sur $f(S^1)$, ce qui fournit une variété difféomorphe à la réunion disjointe de D^2 et d'une variété sans bord. Cette variété a un fibré normal trivial dans $S^i \times D^2$; en effet, celui-ci est stablement trivial (car le fibré tangent d'une variété orientable de dimension 2 est stablement trivial, et le fibré tangent de $S^i \times D^2$ est trivial), donc trivial car $i \geq 3$ ([16])

lemme 3.5). On définit alors $(\rho_2, \dots, \rho_i)$ à l'aide d'une trivialisation de ce fibré normal, ce qui termine la démonstration de la proposition 5.1.1.

5.1.3 Remarques :

- (1) Nous venons en fait de démontrer l'injectivité du J-homomorphisme $J_1 : \pi_1(SO(i)) \rightarrow \pi_{i+1}(S^i)$ pour $i \geq 3$.
- (2) La même démonstration montre que $F^{-1}(T_0)$ muni de la trivialisation ρ est normalement cobordant rel. le bord dans $S^i \times D^2$ à une sous-variété difféomorphe à la réunion disjointe d'un disque D^2 et de tores T^2 . La seule chose à voir est que, dès que $i \geq 2$, il n'y a aucune obstruction à une chirurgie trivialisée qui réalise la somme connexe de deux composantes de $F^{-1}(T_0)$ (on élimine ainsi les composantes sphériques).
- (3) Dès que $\pi_1(S^i) = 0$, c'est-à-dire $i \geq 2$, on peut supposer que $\partial F^{-1}(T_0) = s_0 \times \partial D^2$, où s_0 est un point-base choisi sur S^i , et même que $F^{-1}(T_0) \cap S^i \times C = s_0 \times C$; il suffit de composer $F|S^i \times \partial D^2$ avec une isotopie ambiante de $S^i \times \partial D^2$ qui respecte la projection sur ∂D^2 ; une telle isotopie existe car $\partial F^{-1}(T_0)$ définit une section homotope à 0 de la projection de $S^i \times \partial D^2$ sur ∂D^2 et toute application de D^2 dans S^i se relève en une application de D^2 dans $\text{Diff } S^i$.
On voit alors facilement que, si $i \geq 3$, $F^{-1}(T_0)$ muni de la trivialisation ρ est normalement cobordant rel. le bord à la réunion disjointe de $s_0 \times D^2$ et d'une variété sans bord Λ . Le complémentaire d'un voisinage tubulaire ouvert de $s_0 \times D^2$ dans $S^i \times D^2$ est naturellement difféomorphe à $D^i \times D^2$, et la construction de Thom-Pontryagin effectuée sur la sous-variété trivialisée Λ de $D^i \times D^2$ fournit un élément $\chi(F) \in \pi_{i+2}(S^i) \cong \mathbb{Z}_2$.

5.1.4 Proposition : Si $i \geq 4$, la construction précédente définit un morphisme de groupes

$$\chi : \pi_2^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0) \rightarrow \pi_{i+2}(S^i) \quad .$$

Démonstration : Commençons par la bonne définition de χ . Soient

$F_0, F_1 : S^i \times D^2 \rightarrow M$ deux applications lisses et transversales sur T_0 , représentant respectivement des éléments $\alpha_0, \alpha_1 \in \pi_2^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0)$.

La proposition 5.1.1 nous fournit deux cobordismes trivialisés

W_0 (resp. W_1) $\subset S^i \times D^2 \times I$ entre $F_0^{-1}(T_0)$ (resp. $F_1^{-1}(T_0)$) muni de sa trivialisation canonique et V_0 (resp. V_1), avec $V_0 = \Delta_0 \cup \Lambda_0$, $V_1 = \Delta_1 \cup \Lambda_1$, Δ_0 et Δ_1 difféomorphes à D^2 , $\partial\Lambda_0 = \partial\Lambda_1 = \emptyset$. Si $\alpha_0 = \alpha_1$, il existe une application $H : S^i \times D^2 \times I \rightarrow M$ qu'on peut supposer lisse et transversale sur T_0 , qui vérifie en particulier

- (1) $H|_{S^i \times D^2 \times \{0\}} \equiv F_0$, $H|_{S^i \times D^2 \times \{1\}} \equiv F_1$,
- (2) Pour tout $(x, t) \in \partial D^2 \times I$, $H(S^i \times (x, t))$ rencontre T_0 transversalement et en un seul point.
- (3) La trivialisation canonique de $\nu(T_0; M)$ induit sur $H^{-1}(T_0) \subset S^i \times D^2 \times I$ une trivialisation qui en fait un cobordisme normal entre $F^{-1}(T_0)$ et $F_1^{-1}(T_0)$ munies de leurs trivialisations canoniques.

Il est alors facile de recoller W_0 , $H^{-1}(T_0)$, et W_1 pour obtenir un cobordisme trivialisé $W \subset S^i \times D^2 \times I$ entre V_0 et V_1 (on a identifié les segments $[0, 1]$ et $[0, 3]$). Comme précédemment on peut, dès que $i \geq 3$, supposer que $\partial W = s_0 \times \partial(D^2 \times I) \subset S^i \times \partial(D^2 \times I)$, et choisir un plongement $f : S^2 \rightarrow \text{int } W$ qui soit le paramétrage naturel du bord d'un petit voisinage collier de ∂W .

Soit $(\rho_1, \dots, \rho_i)$ la trivialisation de $\nu(W; S^i \times D^2 \times I)$; si $i \geq 4$, on peut prolonger f en un plongement $f_1 : D^3 \rightarrow S^i \times \text{int}(D^2 \times I)$ qui vérifie :

- (1) $f_1(D^3) \cap W = f(S^2)$
- (2) la restriction à $f(S^2)$ de ρ_1 est un champ rentrant dans $f_1(D^3)$.

L'obstruction à la "chirurgie trivialisée" sur $f(S^2)$ avec ces données est celle à prolonger $(\rho_2, \dots, \rho_i)$ en un champ de $(i-1)$ -repères normaux à $f_1(D^3)$ dans $S^i \times D^2 \times I$; cette obstruction habite dans $\pi_2(V_{i, i-1})$, où $V_{i, i-1}$ est la variété de Stiefel des $(i-1)$ -repères dans $\mathbb{R}^i$. Mais $\pi_2(V_{i, i-1}) \cong \pi_2(SO(i)) = 0$. On en déduit que, si $i \geq 4$, W est normalement cobordant rel. le bord à la réunion disjointe d'un cobordisme normal $X \cong D^3$ entre Δ_0 et Δ_1 , et d'un cobordisme normal Y entre Λ_0 et Λ_1 . Dès que

$i \geq 4$, on peut supposer que $X \equiv s_0 \times D^2 \times I$, et le complémentaire d'un voisinage tubulaire de X dans $S^i \times D^2 \times I$ est naturellement difféomorphe à $D^i \times D^2 \times I$. L'existence de Y montre alors que les éléments de $\pi_{i+2}(S^i)$ respectivement associés à F_0 et F_1 sont les mêmes (on a montré en même temps l'indépendance du choix de W_0 et W_1 ; il suffit pour le voir de prendre $F_0 \equiv F_1$, et $H \equiv$ homotopie triviale de F_0 à F_0). Il reste à montrer que χ est un morphisme de groupes : cela vient du fait que la construction de Thom-Pontryagin associe à la réunion de sous-variétés trivialisées de S^{i+2} contenues dans des boules disjointes la somme dans $\pi_{i+2}(S^i)$ des éléments associés respectivement à chacune. La proposition 5.1.4 est ainsi démontrée.

5.1.5 Proposition : Si $4 \leq i \leq n-5$, l'application composée

$$\pi_2(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0) \xrightarrow{\text{rel } T_0} \pi_2^0(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0) \xrightarrow{\chi} \pi_{i+2}(S^i)$$

est un épimorphisme (en particulier, χ est un épimorphisme).

Démonstration : On utilise une généralisation de la construction décrite dans ([12], lemme 1.4.1). Nous commençons par rappeler cette dernière, qui est possible dès que $3 \leq i \leq n-4$, car nous aurons besoin de la préciser. On commence par choisir une métrique riemannienne pour laquelle S_0 et T_0 se coupent orthogonalement. Soit $K: S^i \times S^1 \rightarrow M$ un plongement représentant un lacet trivial de la composante connexe de φ_0 dans $\text{Plgt}^0(S^i, M)$; on suppose que $K(S^i \times S^1) \subset \partial N$, où N est un voisinage tubulaire trivial de S_0 dans M (se rappeler que S_0 est le bord d'une anse). Soit $\omega \in \pi_2(M)$ (on n'utilisera pour la proposition 5.1.5 que le cas $\omega = 0$) ; on représente ω par une sphère anguleuse Σ plongée dans M , réunion sur leur bord de deux disques D et δ qui vérifient :

- (a) $\delta \subset \partial N \cap T_0$
- (b) $D \cap \text{int } N = \emptyset$
- (c) $\text{int } D \cap T_0 = \emptyset$
- (d) $D \cap \partial N = \partial D = \partial \delta = K(S^i \times S^1) \cap T_0 = l$, et D est orthogonal à ∂N le long de la courbe l .

On choisit alors un champ $\vec{u}$ de vecteurs normaux à D qui, le long de l , soit normal à T_0 et tangent à $K(S^i \times S^1)$; si la métrique est telle que $K(S^i \times S^1)$ soit totalement géodésique au voisinage de T_0 , ce champ permet de translater D jusqu'à $\tilde{D}$ tel que $\tilde{D} \cap T_0 = \emptyset$, $\tilde{D} \cap S_0 = \emptyset$, et $\text{int } \tilde{D} \cap \partial N = \emptyset$. Soit $\tilde{l}$ le bord de $\tilde{D}$; en translatant le long de $\vec{u}$ la restriction à l de la trivialisation canonique ξ de $v(l; K(S^i \times S^1))$ on obtient une trivialisation $\tilde{\xi}$ de $v(\tilde{l}; K(S^i \times S^1))$. Soit $\tilde{\xi}_a$ la trivialisation déduite de $\tilde{\xi}$ par action de l'élément $a \in \mathbb{Z}_2 \cong \pi_1(SO(i))$ ($i \geq 3$). Si $i \leq n-4$, le groupe $\pi_1(V_{n-2,i})$ est nul et il n'y a pas d'obstruction à modifier $K(S^i \times S^1)$ par "chirurgie plongée" sur $\tilde{l}$ avec la trivialisation $\tilde{\xi}$ de $v(\tilde{l}; K(S^i \times S^1))$ et le disque $\tilde{D}$. (Remarquons que c'est dans notre sens qu'il faut entendre "chirurgie plongée" à la page 426 de [12], et non pas dans celui de [9] comme le fait croire à tort la référence). On obtient ainsi une sphère $\mathcal{E}(a, \omega)$ de dimension $i+1$. Nous allons voir qu'il existe en fait une trivialisation du fibré normal $v(K(S^i \times S^1); M)$ qui permet de réaliser* "chirurgie trivialisée". Partons d'une trivialisation $(\rho_1, \dots, \rho_{n-i-1})$ de $v(K(S^i \times S^1); M)$ pour laquelle la restriction de ρ_1 à $\tilde{l}$ soit rentrante dans $\tilde{D}$, et notons $(\sigma_1, \dots, \sigma_i)$ un prolongement de $\tilde{\xi}_a$ en un champ de i -repères normaux à $\tilde{D}$ dans M . Il y a une obstruction dans $\pi_1(SO(n-i-2))$ à prolonger la restriction à $\tilde{l}$ du champ $(\rho_2, \dots, \rho_{n-i-1})$ en un champ de $(n-i-2)$ -repères normaux à $\tilde{D}$ dans M et orthogonaux au sous-fibré de $v(\tilde{D}, M)$ engendré par $(\sigma_1, \dots, \sigma_i)$. On remarque alors que les trivialisations de $v(K(S^i \times S^1); M)$ de la forme $(\rho_1, \rho'_2, \dots, \rho'_{n-i-1})$ sont en correspondance biunivoque avec les éléments de $[S^i \times S^1, SO(n-i-2)]$, et que l'on peut en particulier modifier la trivialisation initiale par un élément de $\pi_1(SO(n-i-2))$ en utilisant l'application $[S^1, SO(n-i-2)] \rightarrow [S^i \times S^1, SO(n-i-2)]$ induite par la projection de $S^i \times S^1$ sur S^1 . Il est clair qu'on peut obtenir ainsi une trivialisation pour laquelle l'obstruction précédente s'annule. Nous avons donc démontré que le fibré normal $v(\mathcal{E}(a, \omega); M)$ est trivial. Cette remarque est importante, car elle nous permet de répéter avec $\mathcal{E}(a, \omega)$ la construction faite précédemment avec S_0 . Soit K' un plongement de $S^{i+1} \times S^1$ dans M représentant un lacet trivial dans $\text{Plgt}(S^{i+1}, M)$ passant par un plongement d'image $\mathcal{E}(a, \omega)$, et dont l'image est contenue dans un voisinage tubulaire trivial N' de $\mathcal{E}(a, \omega)$ ne rencontrant pas S_0 . L'intersection $K'(S^{i+1} \times S^1) \cap T_0$ s'écrit naturellement $l \times l' \cong T^2$.

* la "chirurgie plongée" précédente comme ...

Tout élément $\omega' \in \pi_2(M)$ se représente par une sphère anguleuse Σ' plongée dans M , réunion sur leur bord de deux disques D' et δ' qui vérifient les conditions suivantes :

$$(a') \quad \delta' \subset N' \cap T_o$$

$$(b') \quad D' \cap S_o = \emptyset$$

$$(c') \quad \text{int } D' \cap T_o = \emptyset$$

$$(d') \quad D' \cap K'(S^{i+1} \times S^1) = \partial D' = \partial \delta' = \{*\} \times l', \text{ où } * \in l, \text{ et } D' \text{ est ortho-} \\ \text{gonal à } K'(S^{i+1} \times S^1) \text{ le long de } \partial D'.$$

Comme précédemment, on définit $\vec{u}'$, $\tilde{l}'$, $\tilde{D}'$, et on associe à chaque élément $a' \in \mathbb{Z}_2$ une trivialisation $\tilde{\xi}'_a, \oplus \varepsilon$ de $v(\tilde{l}'; K'(S^{i+1} \times S^1))$ obtenue en tordant par $a' \in \pi_1(SO(i)) \cong \mathbb{Z}_2$ la trivialisation canonique ξ' de $v(l \times l'; K'(S^{i+1} \times S^1))|l'$, en la transportant suivant $\vec{u}'$, et en la complétant par l'unique trivialisation ε de $v(l'; l \times l')$. Si $i \leq n-5$, le groupe $\pi_1(V_{n-2, i+1})$ est nul et il n'y a pas d'obstruction à modifier $K'(S^{i+1} \times S^1)$ par la "chirurgie plongée" sur $\tilde{l}'$ définie par le disque $\tilde{D}'$ et la trivialisation $\tilde{\xi}'_a, \oplus \varepsilon$ de $v(\tilde{l}'; K'(S^{i+1} \times S^1))$; on obtient une sphère $\mathcal{E}' \equiv \mathcal{E}'(a, a', \omega, \omega')$ plongée dans M , et coupant T_o transversalement suivant la tore $l \times l'$. Dans $\mathcal{E}'$ les courbes l et l' bordent des disques plongés Δ (que l'on peut supposer dans la partie $\mathcal{E} \times \{*\} \subset K'(S^{i+1} \times S^1)$ non touchée par la chirurgie) et Δ' , bien définis à isotopie près si $i \geq 4$, qui ne coupent $l \times l'$ que suivant l et l' respectivement, et qui partent suivant le champ $\vec{u}$ (resp. $\vec{u}'$). On peut donc associer à l (resp. l') l'obstruction $\gamma(l, \rho)$ (resp. $\gamma(l', \rho)$) $\in \pi_1(V_{i, i-1}) \cong \pi_1(SO(i)) \cong \mathbb{Z}_2$ à modifier par une "chirurgie trivialisée" sur l (resp. l') la variété $l \times l'$ munie de la trivialisation ρ de $v(l \times l', \mathcal{E}')$ induite par la trivialisation canonique de $v(T_o; M)$. Montrons que $\gamma(l, \rho) = a$, et $\gamma(l', \rho) = a'$. On sait que ξ_a trivialise $v(l; \mathcal{E}) \cong v(l \times l'; \mathcal{E}')|l$ et est homotope à $\vec{u} \oplus \theta$, où θ se prolonge en un champ de $(i-1)$ -repères normaux à Δ dans $\mathcal{E}$; de même, ξ'_a trivialise $v(l \times l'; \mathcal{E}')|l'$, et $\xi'_a, \oplus \varepsilon$ est homotope à $\vec{u}' \oplus \theta'$, où θ' se prolonge en un champ de i -repères normaux à Δ' dans $\mathcal{E}'$. Mais la restriction à l (resp. l') de la trivialisation canonique ρ est justement ξ (resp. ξ'). On en déduit que $\gamma(l, \rho) = 0$ si et seulement si $a = 0$ (resp. $\gamma(l', \rho) = 0$ si et seulement si $a' = 0$) d'où la conclusion.

Nous avons besoin maintenant d'un lemme tenant dans cette théorie le rôle tenu par l'injectivité de $J_1 : \pi_1(SO(i)) \rightarrow \pi_{i+1}(S^i)$ ($i \geq 3$) dans la théorie à un paramètre de moins (voir [12], lemme 1.2.2).

Soit $f : S^1 \times S^1 \hookrightarrow S^{i+2}$ un plongement ($i \geq 3$) et soit ρ une trivialisation de $\nu(f(S^1 \times S^1); S^{i+2})$. Soit $t(f, \rho)$ l'élément de $\pi_{i+2}(S^i)$ obtenu par la construction de Thom-Pontryagin. A chaque lacet plongé $c \hookrightarrow f(S^1 \times S^1)$, on associe un élément $\gamma(c, \rho) \in \pi_1(V_{i, i-1}) \cong \pi_1(SO(i)) \cong \mathbb{Z}_2$ qui est l'obstruction à modifier $(f(S^1 \times S^1); \rho)$ par "chirurgie trivialisée" sur c . On pose $l = f(S^1 \times \{*\})$ et $l' = f(\{*\} \times S^1)$, où $l \cap l' = f(\{*\} \times \{*\})$.

5.1.6 Lemme : La nullité de $t(f, \rho)$ équivaut à la nullité de l'un au moins des deux éléments $\gamma(l, \rho)$ et $\gamma(l', \rho)$.

Avant de démontrer ce lemme, finissons la démonstration de la proposition 5.1.5. Soit R un plongement de $S^i \times S^2$ dans M représentant l'élément nul de $\pi_2(\text{Plgt}^0(S^i, M); \varphi_0)$ et tel que $R(S^i \times S^2) \cap \mathcal{C}'(a, a', \omega, \omega') = \emptyset$. Choisissons un chemin η plongé dans M , d'origine dans $R(S^i \times S^2) \cap T_0$, d'extrémité dans $\mathcal{C}' \cap T_0$, ne rencontrant pas ailleurs $R(S^i \times S^2)$ et $\mathcal{C}'$, et représentant l'élément $g \in \pi_1(M, T_0) \cong \pi_1(M)$. Faisons la somme connexe de $R(S^i \times S^2)$ et $\mathcal{C}'$ le long d'un chemin obtenu à partir de η par une petite isotopie le disjoignant de T_0 . On obtient une sous-variété $\mathcal{T} \equiv \mathcal{T}(a, a', \omega, \omega', g)$ naturellement diffeomorphe à $S^i \times S^2$, et telle que $\mathcal{T} \cap T_0$ soit la réunion d'une sphère S^2 et du tore $1 \times 1'$. Il existe un paramétrage $F : S^i \times S^2 \rightarrow \mathcal{T}$ qui envoie $s_0 \times S^2$ dans T_0 et qui induit sur $\nu(1 \times 1'; (S^i - s_0) \times S^2)$ la trivialisation ρ . On a $\gamma(l, \rho) = a$, $\gamma(l', \rho) = a'$. Si on a choisi a et a' non nuls, on déduit du lemme 5.1.6 et de la définition de χ que $\chi[F] \neq 0 \in \pi_{i+2}(S^i)$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons qu'on a obtenu en fait beaucoup d'éléments α a priori distincts tels que $\chi(\alpha) \neq 0$. Nous verrons en fait qu'une condition nécessaire et suffisante pour que χ soit injective est que $\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$.

Démonstration du lemme 5.1.6 : Tout d'abord, l'inclusion de

$S^1 \times \{*\} \cup \{*\} \times S^1$ dans T^2 induit un isomorphisme

$\Phi: [T^2, SO(i)] \rightarrow [S^1 \vee S^1, SO(i)] \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. En effet, le complémentaire d'un disque D^2 plongé dans $T^2 - (S^1 \times \{*\} \cup \{*\} \times S^1)$ se rétractant par déformation sur $S^1 \times \{*\} \cup \{*\} \times S^1$, Φ se factorise à travers l'isomorphisme $[T^2 - \text{int } D^2, SO(i)] \rightarrow [S^1 \vee S^1, SO(i)]$; la classe de ∂D^2 dans $[S^1, T^2 - \text{int } D^2]$ étant un commutateur et $[S^1, SO(i)]$ étant abélien, la surjectivité de Φ est claire. L'injectivité vient de ce que $\pi_2(SO(i)) = 0$ car une application de T^2 dans $SO(i)$ dont l'image par Φ est triviale se factorise à homotopie près à travers une application de $T^2/S^1 \times \{*\} \cup \{*\} \times S^1 \cong S^2$ dans $SO(i)$.

A une décomposition de T^2 en produit $S^1 \times S^1$ on associe une trivialisation ρ_0 de $v(f(S^1 \times S^1); S^{i+2})$ bien définie à homotopie près d'après ce qui précède par les deux conditions $\gamma(1, \rho_0) = 0$ et $\gamma(1', \rho_0) = 0$.

Affirmation : Le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} [T^2, SO(i)] & \xrightarrow{t} & \pi_{i+2}(S^i) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

où $t(u) = t(f, u \cdot \rho_0)$, $u \cdot \rho_0$ étant la trivialisation de $v(f(S^1 \times S^1); S^{i+2})$ déduite de ρ_0 par l'action de $u \in [T^2, SO(i)]$, et où $\mu(a, b) = a \cdot b$ (c'est-à-dire $\mu(a, b) \neq 0$ équivaut à $a \neq 0$ et $b \neq 0$).

Le lemme 5.1.6 suit de l'affirmation, car toute trivialisation ρ s'écrit de manière unique $u \cdot \rho_0$, et il est clair que $t(u) = t(f, \rho)$ (définition de t), et

$$\Phi(u) = (\gamma(1, \rho), \gamma(1', \rho))$$

(par définition de ρ_0).

Démonstration de l'affirmation : Si $\bar{\phi}(u) \neq (1,1)$ la conclusion est une conséquence de la nullité de l'une au moins des obstructions $\gamma(1, u, \rho_0)$, $\gamma(1', u, \rho_0)$ à la chirurgie plongée ; le couple $(f(S^1 \times S^1); u, \rho_0)$ est alors normalement cobordant à une sphère S^2 , ce qui montre, puisque $\pi_2(SO(i))=0$, que $t(f, u, \rho_0) = 0$, c'est-à-dire $t(u) = 0$.

Le seul cas intéressant est celui où $\bar{\phi}(u) = (1,1)$: soit $(V, \xi) \subset S^{i+2}$ une sous-variété V orientable de dimension 2 de genre h , munie d'une trivialisation ξ de son fibré normal $\nu(V; S^{i+2})$; supposons que (V, ξ) représente l'élément non trivial de $\pi_{i+2}(S^i)$. Soient $a_1, b_1, \dots, a_h, b_h$ les générateurs standard de $[S^1, V]$ (on peut supposer sans perte de généralité que le plongement de V dans S^{i+2} est standard). Soit ξ_0 la trivialisation standard de $\nu(V; S^{i+2})$, c'est-à-dire celle qui, pour tout $j=1, \dots, h$, vérifie $\gamma(a_j, \xi_0) = \gamma(b_j, \xi_0) = 0$. Soient enfin $\omega_1, \dots, \omega_{h-1}$ les générateurs standard séparant les anses de V . Pour tout $j=1, \dots, h$, la classe de ω_j dans $[S^1, V]$ est un produit de commutateurs des classes des a_j et des b_j . On en déduit par un raisonnement déjà utilisé que pour tout $j=1, \dots, h-1$, $\gamma(\omega_j, \xi) = \gamma(\omega_j, \xi_0) = 0$. Le couple (V, ξ) est donc normalement cobordant à une réunion disjointe $(T_1, \rho_1) \cup \dots \cup (T_h, \rho_h)$ de tores T^2 . Etant donné un plongement f de T^2 dans S^{i+2} , il doit donc exister au moins une trivialisation ρ de $\nu(f(T^2); S^{i+2})$ qui vérifie $t(f, \rho) \neq 0 \in \pi_{i+2}(S^i)$; mais la seule possibilité, si $\rho = u, \rho_0$, est que $\bar{\phi}(u) = (1,1) \in \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, ce qui termine la démonstration de l'affirmation, et donc celle du lemme 5.1.6.

5.1.7 Remarques :

(1) Un bon exercice est de s'assurer directement que

$$\gamma(1+1', u, \rho_0) = \gamma(1, u, \rho_0) + \gamma(1', u, \rho_0) + 1 \in \mathbb{Z}_2, \text{ en rappelant que } \bar{\phi}(u) = (\gamma(1, u, \rho_0), \gamma(1', u, \rho_0)).$$

(2) Si on choisit $\omega = \omega' = 0 \in \pi_2(M)$ et $g = 0 \in \pi_1(M)$, on obtient un plongement $F: S^i \times S^2 \rightarrow M$, d'image $\mathcal{T}(1,1,0,0,0)$ qui vérifie en plus de $\chi \pi[F] \neq 0 \in \pi_{i+2}(S^i)$

(i) $\nu(F(S^i \times S^2); M)$ est trivial

(ii) F est d'ordre 2 dans le groupe absolu $\pi_2(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0)$.

On a déjà vu le (i) ; quant au (ii) ce sera une conséquence de la technique qu'on va utiliser maintenant pour montrer dans certains cas l'injectivité de χ , car $\chi \pi[F \circ F] = 0 \in \pi_{i+2}(S^i)$.

- (3) On peut relier la surjectivité de χ à la non-unicité du processus de Whitney de modification des intersections ; nous verrons ceci à la fin du paragraphe 5.1, lorsque nous aurons rappelé les techniques nécessaires.

5.1.8 Proposition : Si $4 \leq i \leq n-5$, et si $\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$, le morphisme

$$\chi : \pi_2^{\text{rel } T^0}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0) \rightarrow \pi_{i+2}(S^i)$$

est un monomorphisme.

5.1.9 Corollaire : Si $4 \leq i \leq n-4$, et si $\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$, $\pi_1(\mathcal{C}(h); \varepsilon_0)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$.

D'après l'isomorphisme de dualité rappelé au paragraphe 5.2, il suffit d'appliquer la proposition 5.1.8 pour $4 \leq i < \frac{n}{2}$.

Démonstration de la proposition 5.1.8 : Dans [12], on utilisait l'isomorphisme de dualité pour se ramener au cas $i \leq \frac{n}{2}$. Ici nous utiliserons (sauf pour $i = n-4$) le théorème 3.1.2 dont on déduit immédiatement que, si $n \geq 7$, $n-i \geq 5$, tout élément $\alpha \in \pi_2^{\text{rel } T^0}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0)$ est représenté par un plongement $F : S^i \times D^2 \rightarrow M$ transversal sur T_0 .

5.1.10 Lemme : Si $3 \leq i \leq n-5$, tout élément $\alpha \in \pi_2^{\text{rel } T^0}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0)$ est représenté par un plongement $F : S^i \times D^2 \rightarrow M$ transversal sur T_0 , tel que $F^{-1}(T_0)$ soit la réunion disjointe de $s_0 \times D^2$ et d'une sous-variété sans bord de $S^i \times D^2$.

Démonstration : Soit $F : S^i \times D^2 \rightarrow M$ un plongement transversal sur T_0 représentant α ; on écrit $F^{-1}(T_0) \equiv \Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_r$, avec $\partial \Lambda_0 \cong \partial D^2$, et pour tout $j = 1, \dots, r$, $\partial \Lambda_j = \emptyset$.

On a déjà vu que dès que $i \geq 2$, on peut supposer que $\partial \Lambda_0 = s_0 \times \partial D^2$, et c'est ce que nous ferons désormais. Nous allons montrer qu'on peut, par une isotopie de T_0 dans M , réaliser sur $\Lambda \equiv F^{-1}(T_0)$ la chirurgie utilisée pour démontrer la proposition 5.1.1. La technique permettant de faire une telle opération est décrite dans [30]^{*} et peut se voir plus agréablement de la manière suivante^{**} : on reprend les notations de la démonstration de la proposition 5.1.1 en remplaçant simplement la source $S^i \times D^2$ par le but $F(S^i \times D^2)$ (c'est possible car F est un plongement). On notera $F(S^i \times D^2) \cap T_0 = F(\Lambda) \equiv L = L_0 \cup \dots \cup L_r$. Soit ρ la trivialisation de $\nu(L; F(S^i \times D^2))$ induite par la trivialisation canonique ρ de $\nu(T_0; M)$. On a vu que, dès que $i \geq 3$, il n'y a pas d'obstruction à modifier (L, ρ) par une "chirurgie trivialisée" dans $F(S^i \times D^2)$ sur $f(S^1) \subset \text{int } L_0 \subset L$. Cela revient à dire que si $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_i)$ avec la restriction à $f(S^1)$ de ρ_1 rentrant dans $f_1(D^2) \subset F(S^i \times D^2)$, le champ $(\rho_2, \dots, \rho_i)$ se prolonge en un champ de $(i-1)$ -repères normaux à $f_1(D^2)$ dans $F(S^i \times D^2)$, que l'on notera R_1 . On commence par prolonger cette modification en une modification de (T_0, ρ) par "chirurgie trivialisée" dans M sur $f(S^1) \subset \text{int } L_0 \subset T_0$; il n'y a bien entendu aucune obstruction à cette opération dès que la précédente est possible. Soit (T'_0, ρ') le résultat de cette chirurgie sur (T_0, ρ) . T'_0 n'est pas difféomorphe à T_0 , mais a l'intersection voulue avec $F(S^i \times D^2)$. Dans la deuxième étape, on modifie (T'_0, ρ') par une "chirurgie trivialisée" dans M , complémentaire de la précédente. On obtient ainsi une variété T''_0 naturellement isotope^{***} dans M à T_0 , et ayant comme intersection avec $F(S^i \times D^2)$ le résultat de la modification de L par la première chirurgie dans $F(S^i \times D^2)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème d'extension des isotopies pour trouver une isotopie de $F(S^i \times D^2)$, constante sur $F(S^i \times \partial D^2)$, qui réalise cette modification

^{*}Le passage de nos notations à celles de [30] est le suivant :

$$F(S^i \times D^2) \rightarrow M^r, \quad T^{n-i} \rightarrow N^s, \quad M^n \rightarrow X^m, \\ F(S^i \times D^2) \cap T_0 \equiv L^{2^0} \rightarrow K^n.$$

^{**}Des discussions avec F. Laudenbach m'ont été très utiles à ce sujet.

^{***}L'isotopie est la transportée d'une isotopie canonique dans un modèle (voir [30]).

de son intersection avec T_0 .

Il nous reste donc à voir que, si $3 \leq i \leq n-5$, on peut réaliser sur (T'_0, ρ') une "chirurgie trivialisée" complémentaire de la précédente. On commence par prolonger $f: S^1 \rightarrow \text{int } L_0$ en un plongement $f_2: D^2 \rightarrow T_0$ dont l'image ne rencontre $F(S^i \times D^2)$ que suivant $f(S^1)$ (avec intersection transversale) ; c'est possible par position générale dès que $n-i \geq 5$. Soit $\vec{v}$ un champ sur $f(S^1)$ de vecteurs normaux à L dans T_0 et rentrant dans $f_2(D^2)$. Une petite translation suivant $\vec{v}$ amène $f_1(D^2)$ sur $f'_1(D^2) \subset \hat{T}'_0$. On appelle R'_1 le champ sur $f'_1(D^2)$ obtenu à partir de R_1 par translation suivant $\vec{v}$, et v' un champ sur $f'_1(D^2)$ prolongeant le translaté de $\vec{v}$ à $\partial f'_1(D^2)$, tel que (v', R'_1) soit une trivialisatation de la restriction à $f'_1(D^2)$ de $v(\hat{T}'_0; M)$ (voir [9] et la figure 1). On peut supposer que sur $\partial f'_1(D^2)$, on a $R'_1 = (\rho_2, \dots, \rho_i)$. Appelons $\hat{f}_2(D^2) \subset \hat{T}'_0$ le disque obtenu à partir de $f_2(D^2)$ en limitant ce dernier à $\partial f'_1(D^2)$; la restriction à $\hat{f}_2(D^2)$ de $v(\hat{T}'_0; M)$, qui n'est autre que la restriction à $\hat{f}_2(D^2)$ de $v(T_0; M)$, est trivialisée par $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i)$. Mais R'_1 et $(\rho_2, \dots, \rho_i)$ coïncident sur $f'_1(D^2) \cap \hat{f}_2(D^2)$ et l'arrondissement θ' de la sphère anguleuse $\hat{\theta}' \equiv f'_1(D^2) \cup \hat{f}_2(D^2)$ recolle v' et ρ_1 . On en déduit une trivialisatation de la restriction à θ' de $v(T'_0; M)$.

Il nous reste à montrer deux choses :

(1) que $\hat{\theta}' = f'_1(D^2) \cup \hat{f}_2(D^2)$ borde dans M une boule anguleuse $\hat{B}$ plongée de dimension 3 ne rencontrant $\hat{T}'_0$ que suivant son bord, et ne rencontrant pas $F(S^i \times D^2)$.

(2) que le champ de $(i-1)$ -repères sur $\hat{\theta}'$ défini par $R'_1 \cup (\rho_2, \dots, \rho_i)$ se prolonge en un champ de $(i-1)$ -repères normaux à $\hat{B}$ dans M (il est clair que cela a un sens).

* On note $\hat{T}'_0$ la variété à coins obtenue par chirurgie à partir de T_0 , et T'_0 la variété obtenue à partir de $\hat{T}'_0$ en arrondissant les arêtes (voir figure 1).

On ne peut pas voir
sur cette figure les
trivialisations
 $(\rho_2, \dots, \rho_i)$ et R_1 .

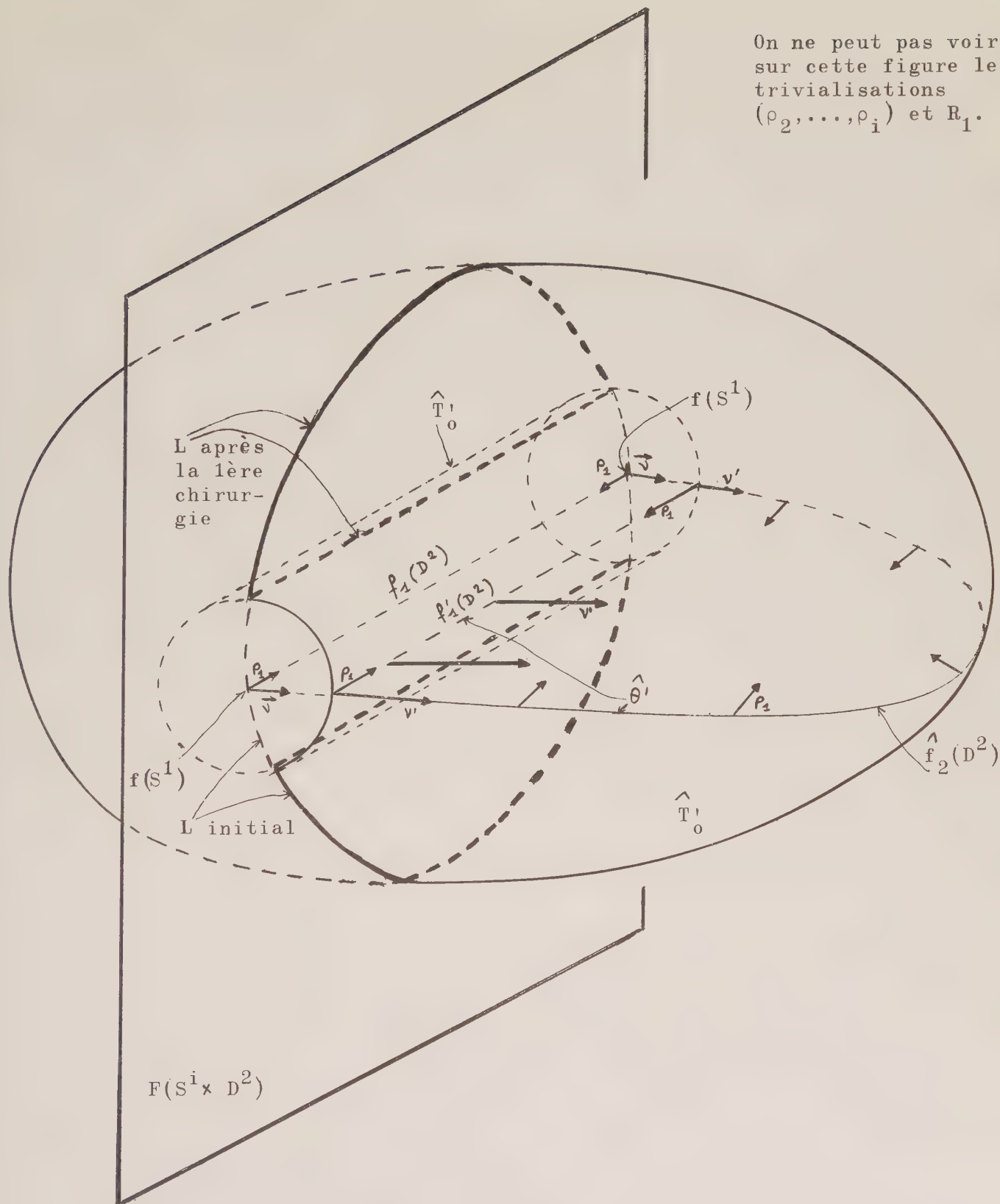


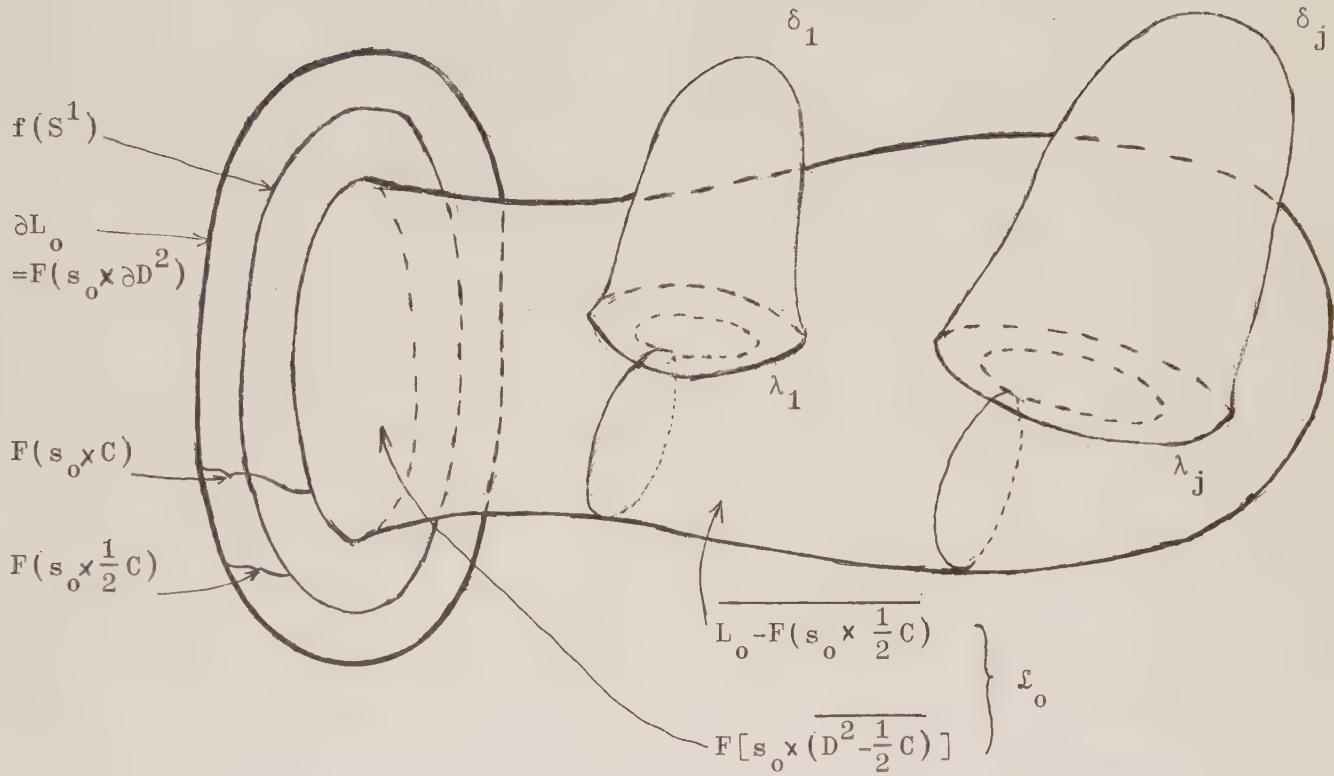
Figure 1 (dans M)

Cette dernière condition est automatiquement remplie si le groupe $\pi_2(V_{n-3,i-1})$ est nul, c'est-à-dire lorsque $2 < n-3-(i-1)$, ou encore $n-i \geq 5$. En ce qui concerne (1), il revient au même de montrer que la sphère anguleuse $\hat{\theta} = f_1(D^2) \cup f_2(D^2)$ borde dans M une boule anguleuse plongée de dimension 3, ne rencontrant $F(S^i \times D^2)$ et T_0 que sur son bord ; on simplifiera ainsi beaucoup les notations.

Commençons par montrer que $\hat{\theta}$ est homotope à zéro dans M . Le plongement $f_1 : D^2 \rightarrow S^i \times D^2$ est choisi homotope à un plongement $\tilde{f}_1$ dont l'image est $F[s_0 \times (D^2 - \frac{1}{2}C)]$, où C est (comme au début du paragraphe 5.1) un voisinage collier de ∂D^2 , avec $f(S^1) = F[s_0 \times \partial(D^2 - \frac{1}{2}C)] \subset \text{int } L_0$ (voir figure 2). Dès que $n-i \geq 3$, tous les prolongements $f_2 : D^2 \rightarrow T_0$ de f sont homotopes ; en particulier, f_2 est homotope à un plongement dont l'image est obtenue à partir de $\overline{L_0 - F(s_0 \times \frac{1}{2}C)}$ en effectuant h "chirurgies plongées" disjointes dans T_0 (si L_0 est de genre h). On peut faire ces chirurgies car

- (1) T_0 est simplement connexe dès que $n-i \geq 2$, et toute courbe λ plongée dans L_0 borde un disque δ plongé dans T_0 dès que $n-i \geq 5$; de plus, ces conditions permettent de plonger dans T_0 une collection de h disques disjoints δ_j bordant les h -courbes λ_j associées aux anses de L_0 , chaque δ_j ne rencontrant $F(S^i \times D^2)$ (avec intersection transversale) que suivant λ_j (voir figure 2).
- (2) pour tout $j = 1, \dots, h$, l'unique trivialisation du fibré normal $v(\lambda_j; L_0)$ se prolonge en un champ de vecteurs normaux à δ_j dans T_0 dès que $\pi_1(S^{n-i-3}) = 0$, c'est-à-dire $n-i \geq 5$.

Mais la variété à coins $\mathcal{L}_0$ obtenue en collant sur leur bord commun $F[s_0 \times (D^2 - \frac{1}{2}C)]$ et $\overline{L_0 - F(s_0 \times \frac{1}{2}C)}$ borde dans M un tore plein $\mathcal{K}_0$ de genre h ne rencontrant les disques δ_j que sur leur bord λ_j ($j = 1, \dots, h$). En effet, dès que $i \geq 3$, $\mathcal{L}_0$ est homotope dans $S^i \times D^2$ à un plongement standard d'une surface de genre h , dont l'image borde un tore plein de genre h . On en déduit que $\hat{\theta} = f_1(D^2) \cup f_2(D^2)$ est homotope dans M au bord de la boule de dimension 3 obtenue à partir de $\mathcal{K}_0$ par chirurgie sur le bord suivant les disques δ_j . Si $n \geq 7$, $\hat{\theta}$ borde donc une boule anguleuse $\hat{B}$ plongée dans M . Il ne reste plus qu'à supprimer les intersections superflues de $\hat{B}$ avec

Figure 2 (dans T_o)

$F(S^i \times D^2)$ ou T_o . Pour T_o , c'est possible par position générale dès que $n-i+3 < n$, c'est-à-dire $i \geq 4$; si $i=3$, c'est encore possible car l'injection de $M - T_o$ dans M induit une injection de $\pi_2(M - T_o)$ dans $\pi_2(M)$ (voir [12], appendice A, proposition A.1). En ce qui concerne $F(S^i \times D^2)$, on conclut par position générale dès que $i+2+3 < n$, c'est-à-dire $n-i \geq 6$; si $n-i=5$, l'intersection de $F(S^i \times D^2)$ avec $\text{int } \hat{B}$ est formée de points isolés disjoints de L que l'on peut éliminer par le bord de $F(S^i \times D^2)$ en utilisant une isotopie de $F(S^i \times D^2)$ dont le support est disjoint de L : une telle isotopie existe dès que $i \geq 2$, car les points d'intersection de $F(S^i \times D^2)$ et $\text{int } \hat{B}$ sont alors joints au bord de $F(S^i \times D^2)$ par des chemins plongés disjoints entre eux et disjoints de L . Le lemme 5.1.10 est ainsi démontré (compte-tenu de la remarque 5.1.3, n°(3)).

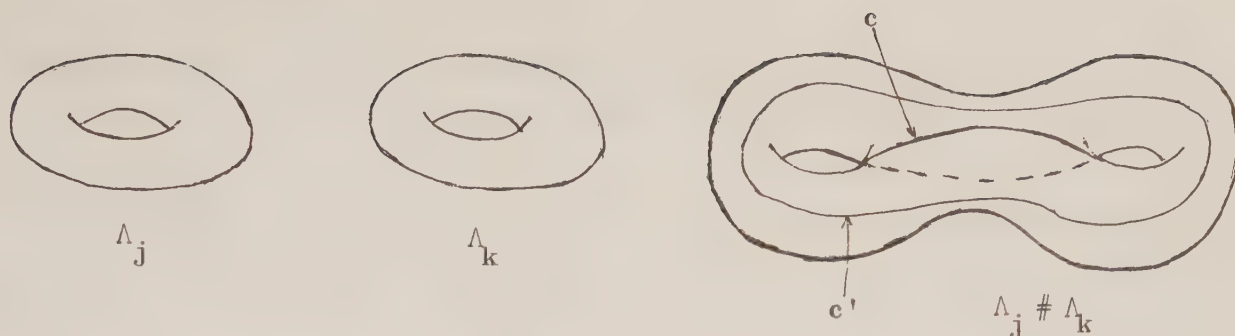
La même démonstration permet en fait de représenter tout élément $\alpha \in \pi_2^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0)$ par un plongement $F: S^i \times D^2 \rightarrow M$ transversal sur T_0 , tel que $F^{-1}(T_0)$ soit la réunion disjointe de $\Lambda_0 \equiv s_0 \times D^2$ et de sous-variétés $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$ difféomorphes à T_2 ou à S_2 .

Si $\pi_1(M) = 0$, il n'y a aucune obstruction à réaliser par une isotopie de T_0 dans M la somme connexe de chaque composante sphérique de $F^{-1}(T_0)$ avec Λ_0 (on obtient un disque qui est isotope rel. le bord à Λ_0 si $i \geq 4$). En toute généralité, il y a une obstruction dans le groupe

$[\pi_3(M)]^{\pi_1(M)-1}$ à l'existence d'une telle isotopie (comparer au théorème 1.4 de [12] ; il n'y a pas de facteur $\mathbb{Z}_2$ car $\pi_2(SO(i)) = 0$). On est donc ramené, si $\pi_1(M) = 0$, au cas où les composantes sans bord $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$ de $F^{-1}(T_0)$ sont des tores T^2 . Si $i \geq 4$, on peut supposer les Λ_j situés dans des boules disjointes contenues dans $S^i \times D^2$. Soit $t_j = t(\Lambda_j, \rho) \in \pi_{i+2}(S^i)$ l'élément associé par Thom-Pontryagin à $\Lambda_j \subset S^i \times D^2 = s_0 \times D^2$, muni de la trivialisation ρ induite par la trivialisation canonique de $v(T_0; M)$.

Il est clair que $\chi(\alpha) = \sum_{j=1}^r t_j$. Si $\pi_2(M) = 0$, on a vu plus haut que les conditions de dimension permettent de réaliser par une isotopie de T_0 dans M la suppression de tous les Λ_j tels que $t_j = 0$ (il découle du lemme 5.1.6 qu'en utilisant une seule paire de chirurgies complémentaires, on peut passer de Λ_j à une sphère S^2). On peut donc supposer que, pour tout $j = 1, \dots, r$, $t_j \neq 0 \in \pi_{i+2}(S^i)$. Il est temps maintenant d'utiliser l'hypothèse $\chi(\alpha) = 0$. La première conséquence est que r est pair. Considérons deux tores Λ_j, Λ_k avec $t_j = t_k \neq 0 \in \pi_{i+2}(S^i)$. Puisque $\pi_1(M) = 0$, on peut réaliser par une isotopie de T_0 dans M la somme connexe de Λ_j et Λ_k . On voit alors facilement, en tenant compte du fait que $\pi_2(M) = 0$, et $t_j = t_k \neq 0$, qu'il n'y a pas d'obstruction à réaliser par une isotopie de T_0 dans M une modification de $\Lambda_j \# \Lambda_k$ par chirurgie sur la courbe plongée c (ou c') dessinée sur la figure 3[♦].

♦ Ceci est vrai quelle que soit la façon dont on a réalisé par isotopie de T_0 la somme connexe de Λ_j avec Λ_k .

Figure 3 (dans $S^1 \times D^2$)

Le résultat de cette modification est difféomorphe au tore T^2 , et son invariant dans $\pi_{i+2}(S^1)$ est $t_j + t_k = 0$. Ceci termine (par récurrence sur r) la démonstration de la proposition 5.1.8.*

5.1.11 Remarques :

(1) La proposition n'est une conséquence du théorème de [30] (compté-tenu du lemme 5.1.10) que dans le cas où $5 \leq i \leq n-7$, et $\pi_1(M) = \pi_2(M) = \pi_3(M) = 0$; c'est bien entendu la présence de la composante à bord de $F^{-1}(T_0)$ qui permet, dès que $\pi_1(M) = 0$, de se débarrasser de la condition sur $\pi_3(M)$.

Remarquons d'autre part que nous évitons la difficulté principale du théorème de Wells qui provient de ce qu'il se donne a priori un cobordisme normal entre l'intersection initiale et $\emptyset$, ce qui l'oblige à vérifier à chaque étape que la trivialisation induite par $v(T_0^i; M)$ coïncide avec celle qu'il s'est fixée. Pour notre part, nous ne définissons l'étape p qu'après avoir réalisé l'étape $p-1$, et nous n'avons donc pas ce problème.

(2) L'intersection avec L étant de dimension 2, on n'a pas le choix de la trivialisation ε de $v(f(S^1); L)$ qui sert à faire la chirurgie ; dire (avec Wells) que la chirurgie définie par (f, ε) préserve la trivialisation canonique ρ de $v(L; F(S^1 \times D^2))$ équivaut donc à dire qu'il n'y a pas d'obstruction à modifier (L, ρ) par "chirurgie trivialisée" dans $F(S^1 \times D^2)$ sur $f(S^1)$. Dans le cas de chirurgies d'indice 1 au contraire (cas de la

* Voir page suivante.

On suppose que la somme connexe a été faite suivant un lacet représentant l'élément neutre de $\pi_1(M, T_0) \cong \pi_1(M)$.

Affirmation : Il y a deux manières de réaliser, par une isotopie de T_0 dans M , la somme connexe des composantes l_0 et l_1 de $\varphi(S^i \times I) \cap T_0$ (voir figure 4).

En effet, le processus permettant de réaliser la somme connexe (qui est analogue au processus de Whitney) se décrit comme précédemment par une suite de deux chirurgies complémentaires. La première de ces chirurgies dépend du choix que l'on fait d'un prolongement à $v(f_1(D^1); \varphi(S^i \times I))$ d'un champ $(\rho_2, \dots, \rho_i)$ de $(i-1)$ -repères sur $f(S^0)$. Les différents choix sont en correspondance avec les éléments de $\pi_1(V_{i,i-1}) \cong \mathbb{Z}_2$ ($i \geq 3$). Le lecteur a maintenant tout ce qu'il faut pour vérifier que, si

$\alpha \in \pi_2^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0)$ est obtenu en recollant deux isotopies de $\varphi : S^i \times I \rightarrow M$ qui réalisent la somme connexe de l_0 et l_1 , et correspondent à deux éléments différents de $\pi_1(V_{i,i-1})$, alors $\chi(\alpha) \neq 0$. L'image réciproque de T_0 par l'application de $S^i \times I \times I$ dans M ainsi obtenue est difféomorphe à un tore T^2 privé d'un disque (voir figure 5).

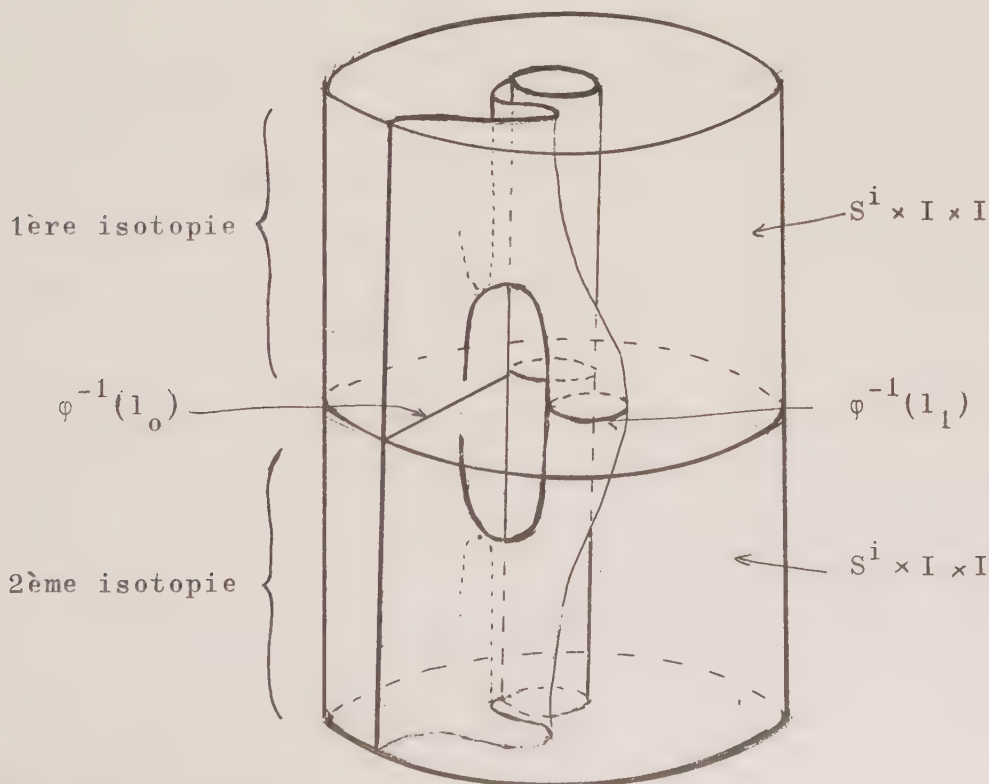


Figure 5

(4) Dans le cas général, on voit que $\pi_2^{\text{rel } T^0}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0)$ dépend de $\pi_1(M)$, $\pi_2(M)$, et $\pi_3(M)$, et est indépendant de $\pi_3(M)$ dès que $\pi_1(M) = 0$. On comparera cette situation à celle de [12]. Remarquons simplement qu'en plus des éléments du noyau de $\chi\pi$ construits à l'aide des $\mathcal{E}'(a, a', \omega, \omega')$ pour a ou $a' = 0 \in \mathbb{Z}_2$, on peut en construire d'autres associés à un couple (ω, g) où $\omega \in \pi_3(M)$, $g \in \pi_1(M)$; il suffit d'imiter la construction des $\Gamma(a, \omega, g)$ de [12] en remplaçant S^1 par S^2 et $\pi_2(M)$ par $\pi_3(M)$ (il n'y a pas de a car $\pi_2(S^0(i)) = 0$).

5.2 Etude de $\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h); \varepsilon_0)$ dans le cas général

5.2.0 Dans tout le paragraphe 5.2 nous travaillerons dans un domaine de dimension permettant de ramener les problèmes d'isotopie à des problèmes d'homotopie.

Rappelons que la condition $i \leq \frac{n}{2}$ n'est pas une restriction en ce qui concerne le calcul des groupes $\pi_k^{\text{rel } T^0}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0)$ à cause de l'existence d'un isomorphisme de dualité

$$\mathfrak{D}: \pi_k^{\text{rel } T^0}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0) \rightarrow \pi_k^{\text{rel } S^0}(\text{Plgt}(S^{n-i}, M); \theta_0) .$$

Soit $F: S^i \times D^k \rightarrow M$ une k -isotopie représentant un élément de $\pi_k^{\text{rel } T^0}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0)$. On suppose par exemple que pour tout $u \in \partial_+ D^k$ (hémisphère supérieur) on a $F|_{S^i \times u} = \varphi_0$. L'application $\text{Diff}(M) \rightarrow \text{Plgt}(S^i, M)$ qui à tout difféomorphisme f de M fait correspondre le plongement $f\varphi_0$ étant une fibration, on peut relever F en une k -isotopie $\tilde{\Phi}: M \times D^k \rightarrow M$ qui vérifie $\tilde{\Phi}(\varphi_0 \times \text{id}) = F$ et qui est la projection sur M quand on la restreint à $M \times \partial_+ D^k$. $\mathfrak{D}[F]$ est alors la classe de $G: S^{n-i} \times D^k \rightarrow M$ définie par $G(x, u) = \tilde{\Phi}_u^{-1}(\tilde{\Phi}_0(x))$, où $x \in S^{n-i}$, $u \in D^k$, $\tilde{\Phi}_u(x) = \tilde{\Phi}(x, u)$. Il est clair que $\mathfrak{D}$ est bien défini et qu'on peut exhiber son inverse de la même manière. Nous pourrions donc nous restreindre dans la suite à $i \leq \frac{n}{2}$.

5.2.1 Soit $\text{Hom}(S^i, M)$ l'espace (muni de la topologie C^∞) des applications lisses de S^i dans M , et soit ρ l'application de $\text{Hom}(S^i, M)$ dans M définie par $\rho(\varphi) = \varphi(s_0)$, où s_0 est un point-base sur S^i . On choisit comme point-base de $\text{Hom}(S^i, M)$ le plongement φ_0 , et on suppose que $\varphi_0(s_0) = \varphi_0(S^i) \cap T_0 = m_0$. On pourra choisir aussi un plongement φ'_0 proche de φ_0 mais tel que $\varphi_0(S^i) \cap \varphi'_0(S^i) = \emptyset$. On utilisera indifféremment pour ρ l'application $\varphi \mapsto \varphi(s_0)$ ou l'application $\varphi \mapsto \varphi(\tilde{s}_0)$, $\tilde{s}_0 \in S^i$ étant un point proche de s_0 . Le sens des flèches sera clair d'après les points-bases choisis, qui pourront être $\varphi_0, \varphi'_0, \varphi_0(s_0) = m_0, \varphi_0(\tilde{s}_0) = \tilde{m}_0, \varphi'_0(s_0) = s'_0, \varphi'_0(\tilde{s}_0) = \tilde{m}'_0$ (voir la figure 6).

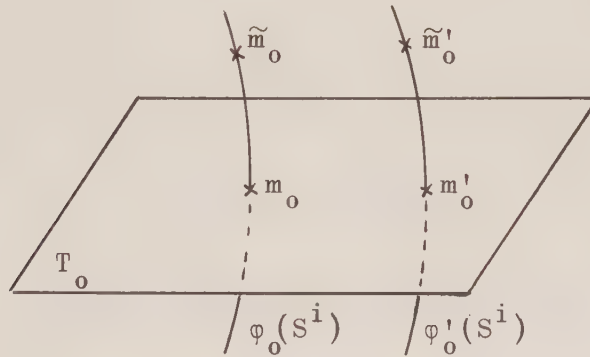


Figure 6 (dans M)

On sait que ρ est une fibration ; nous noterons $\text{Hom}_{m_0}(S^i, M)$ la fibre $\rho^{-1}(m_0)$ et j l'inclusion de cette fibre dans $\text{Hom}(S^i, M)$. On obtient la suite exacte

$$(1) \quad \dots \rightarrow \pi_{k+1}(M; m_0) \rightarrow \pi_k(\text{Hom}_{m_0}(S^i, M); \varphi_0) \xrightarrow{j_*} \pi_k(\text{Hom}(S^i, M); \varphi_0) \xrightarrow{\rho_*} \pi_k(M; m_0) \rightarrow \dots$$

Nous allons donner une autre interprétation des termes de cette suite (voir [18] pour une application au croisement des anses). Tout d'abord, si C_{m_0} désigne l'application constante de valeur m_0 , on a des isomorphismes

$$\pi_k(\text{Hom}_{m_0}(S^i, M); C_{m_0}) \rightarrow \pi_{i+k}(M; m_0)$$

et

$$\pi_k(\text{Hom}_{m_0}(S^i, M); \varphi_0) \rightarrow \pi_k(\text{Hom}_{m_0}(S^i, M); C_{m_0}) \quad ;$$

le premier est évident, et le deuxième vient de ce que $\text{Hom}_{m_o}(S^i, M)$ est muni d'une loi de H-espace par la loi de cogroupe de S^i . On en déduit par composition un isomorphisme

$$A : \pi_k(\text{Hom}_{m_o}(S^i, M); \varphi_o) \rightarrow \pi_{i+k}(M, m_o).$$

D'autre part, définissons $l(\varphi_o)$ par

$$l(\varphi_o) = \sup \{ p \in \mathbb{N} ; \pi_r(\varphi_o) = 0, \quad 0 \leq r \leq p \},$$

et soit (C_k) la condition

$$(C_k) : k \leq \inf (2n - 3i - 3, n - i - 2, n - 2i + l(\varphi_o) - 1) \quad .$$

On montre dans [13] que dès que (C_k) est vérifiée, l'inclusion de $\text{Plgt}(S^i, M)$ dans $\text{Hom}(S^i, M)$ induit un isomorphisme

$$B : \pi_j(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_o) \rightarrow \pi_j(\text{Hom}(S^i, M); \varphi_o)$$

pour $j \leq k-1$, et un épimorphisme pour $j = k$.

Si (C_{k+1}) est vérifiée, on déduit donc de (1) et des isomorphismes A, B la suite exacte

$$(2) \quad \pi_{k+1}(M; m_o) \rightarrow \pi_{i+k}(M; m_o) \xrightarrow{\beta} \pi_k(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_o) \xrightarrow{p_*} \pi_k(M; m_o) \rightarrow \dots$$

Remarques :

(1) Si $f : S^{i+k} \rightarrow M$ est transversale sur T_o , et si on note $\Lambda \equiv f^{-1}(T_o) \subset S^{i+k}$, il existe une application $F : S^i \times S^k \rightarrow M$ transversale sur T_o , représentant l'élément $\beta[f] \in \pi_k(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_o)$, et telle que $F^{-1}(T_o) \cong \Lambda$.

(2) Dès que $k+1 \leq \inf(2n - 3i - 3, n - i - 2)$, on a un isomorphisme

$$\tilde{B} : \pi_k(\text{Plgt}(S^i, \text{int } N); \varphi_o) \rightarrow \pi_k(\text{Hom}(S^i, \text{int } N); \varphi_o),$$

où N est un voisinage tubulaire de $\varphi_o(S^i)$ dans M .

En effet, la dernière condition de (C_{k+1}) n'intervient plus car $\varphi_0 : S^i \rightarrow \text{int } N$ est une équivalence d'homotopie. On en déduit par composition un morphisme $\phi : \pi_{i+k}(S^i; s_0) \rightarrow \pi_k(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0)$ défini pour $k+1 \leq \inf(2n-3i-3, n-i-2)$, et coïncidant avec $\beta(\varphi_0)_*$ lorsque β est défini. Nous aurons également besoin de la suite exacte d'homotopie de l'inclusion $\varepsilon : \text{Plgt}^0(S^i, M) \rightarrow \text{Plgt}(S^i, M)$, où Plgt^0 désigne le sous-espace des plongements dont l'image rencontre T_0 transversalement et en un seul point :

$$(3) \quad \dots \rightarrow \pi_k(\text{Plgt}^0(S^i, M); \varphi_0) \xrightarrow{\varepsilon_*} \pi_k(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0) \xrightarrow{\pi} \pi_k^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0) \xrightarrow{\delta} \dots$$

5.2.2 Lemme : Si (i, k, n) vérifient (C_{k+1}) et $k+2 \leq i$, il existe une suite exacte scindée

$$0 \rightarrow \pi_k(0(i); \text{id}) \xrightarrow{t} \pi_k(\text{Plgt}^0(S^i, M); \varphi_0) \xrightarrow{p_1} \pi_{i+k}(M - T_0, \tilde{m}_0) \rightarrow 0.$$

Démonstration : On commence par définir les morphismes t et p_1 : Soit $\alpha : 0(i) \rightarrow \text{Diff}(S^i, s_0)$ l'inclusion naturelle, et $y : S^k \rightarrow 0(i)$ une application telle que $y(u_0) = \text{id}$; on représente $t[y]$ par l'application $\phi_y : S^i \times S^k \rightarrow M$ définie par $\phi_y(x, u) = \phi_0([\alpha y(u)]x, u)$ où on a posé $\phi_0(x, u) = \varphi_0(x)$ pour tout $u \in S^k$.

Construisons tout de suite un morphisme

$$\xi : \pi_k(\text{Plgt}^0(S^i, M); \varphi_0) \rightarrow \pi_k(0(i); \text{id})$$

qui vérifie $\xi t = \text{identité}$. Si $F : S^i \times S^k \rightarrow M$ représente $[F] \in \pi_k(\text{Plgt}^0(S^i, M); \varphi_0)$, $F^{-1}(T_0)$ définit une section de la projection de $S^i \times S^k$ sur S^k . On en déduit (comme au 5.1.3 n° (3)) que, dès que $k+1 \leq i$, il existe une isotopie ambiante de $S^i \times S^k$ respectant la projection sur S^k , qui amène $F^{-1}(T_0)$ sur $s_0 \times S^k$. On peut donc supposer que $F^{-1}(T_0) \equiv s_0 \times S^k$. La trivialisation de $v(F^{-1}(T_0); S^i \times S^k)$ induite par la trivialisation canonique de $v(T_0; M)$ définit alors un élément $\xi'(F) \in \pi_k(0(i); \text{id})$ par comparaison avec l'unique trivialisation (à homotopie près) qui se prolonge en une trivialisation de $v(s_0 \times D^{k+1}; S^i \times D^{k+1})$. Si $k+2 \leq i$, ξ' est bien défini car tout $F : S^i \times S^k \rightarrow M$ représentant 0 dans

$\pi_k(\text{Plgt}^0(S^i, M); \varphi_0)$ et tel que $F^{-1}(T_0) \equiv s_0 \times S^k$, se prolonge en $G: S^i \times D^{k+1} \rightarrow M$ tel que $G^{-1}(T_0) \equiv s_0 \times D^{k+1}$. Enfin il est clair que $\xi' t = -\text{identité}$. On pose donc $\xi[F] = \xi'[F]^{-1}$.

Pour définir $p_1[F]$, on considère un représentant $G: S^i \times S^k \rightarrow M$ de $(t \xi[F]^{-1})[F]$. Si $k+1 \leq \inf(i, n-i)$, on peut supposer que $G^{-1}(T_0) \equiv s_0 \times S^k$ et que la restriction de G à $s_0 \times S^k$ se prolonge en une application de $s_0 \times D^{k+1}$ dans T_0 .

Puisque $\xi[G] = 0 \in \pi_k(0(i); \text{id})$, il existe alors un voisinage collier fermé $\mathcal{V}$ de s_0 dans S^i tel que la restriction de G à $\mathcal{V} \times S^k$ se prolonge en une application $G': \mathcal{V} \times D^{k+1} \rightarrow M$ telle que $G'^{-1}(T_0) \equiv s_0 \times D^{k+1}$. Si on suppose que $\mathcal{V}$ ne contient pas $\tilde{s}_0$, le recollement de $G|_{(S^i - \mathcal{V}) \times S^k}$ et de $G'|_{\partial \mathcal{V} \times D^{k+1}}$, composé avec un homéomorphisme fixé ρ de (S^{i+k}, σ_0) sur $[(S^i - \mathcal{V} \times S^k) \cup \partial \mathcal{V} \times D^{k+1}, \tilde{s}_0 \times u_0]$ (u_0 point-base de S^k), fournit un élément $p_1[F] \in \pi_{i+k}(M - T_0; \tilde{m}_0)$. On vérifie facilement que, si $k+2 \leq \inf(i, n-i)$, p_1 est bien défini. On a manifestement $p_1 t = 0$. Nous allons maintenant faire une construction qui, lorsque (C_k) est vérifiée, montre que p_1 est surjective, et qui, lorsque (C_{k+1}) est vérifiée, fournit une section η de p_1 . A toute application $f: (S^{i+k}, \sigma_0) \rightarrow (M - T_0, \tilde{m}_0)$ on associe, par l'intermédiaire de Φ_0 , une application $\Phi_0 \vee f: S^i \times S^k \vee S^{i+k} \rightarrow M$ où le bouquet est défini par l'identification de $(\tilde{s}_0, u_1) \in S^i \times S^k$ avec $\sigma_0 \in S^{i+k}$, $u_1 \neq$ point-base u_0 de S^k .

Soit $\mathcal{K}: S^i \times S^k \rightarrow S^i \times S^k \vee S^{i+k}$ l'application décrite sur la figure 7. $\mathcal{K}$ est l'identité de $S^i \times S^k$ en dehors d'un disque $D \cong D^{i+k}$, $\tilde{s}_0 \times u_1 \in D \subset (S^i - \mathcal{V}) \times (S^k - \mathcal{U})$ ($\mathcal{U}$ voisinage collier fermé de u_0 dans S^k , $\mathcal{V}$ voisinage collier fermé de s_0 dans S^i), et envoie la couronne $C \subset D$ sur D par l'identification naturelle de $S^{i+k-1} \times I / S^{i+k-1} \times 0$ avec S^{i+k} . Enfin la restriction de $\mathcal{K}$ à $\overline{D-C}$ se factorise à travers l'application naturelle de $(\overline{D-C} / \partial(\overline{D-C}), \partial(\overline{D-C}) / \partial(\overline{D-C}))$ sur (S^{i+k}, σ_0) . Soit $F \equiv (\Phi_0 \vee f)\mathcal{K}: S^i \times S^k \rightarrow M$. Si $\mathcal{W}$ est un voisinage collier fermé de T_0 dans M tel que $\overline{\Phi_0^{-1}(\mathcal{W})} = \mathcal{V}$, on peut supposer que $f(S^{i+k}) \subset M - \mathcal{W}$. La restriction de F à $(\overline{S^i - \mathcal{V}}) \times (\overline{S^k - \mathcal{U}})$ définit alors une application

$$\hat{F}: (\overline{S^k - \mathcal{U}}, \partial(\overline{S^k - \mathcal{U}})) \rightarrow (\text{Hom}_{\varphi_0}(\overline{S^i - \mathcal{V}}, \overline{M - \mathcal{W}}), \text{Plgt}_{\varphi_0}(\overline{S^i - \mathcal{V}}, \overline{M - \mathcal{W}})).$$

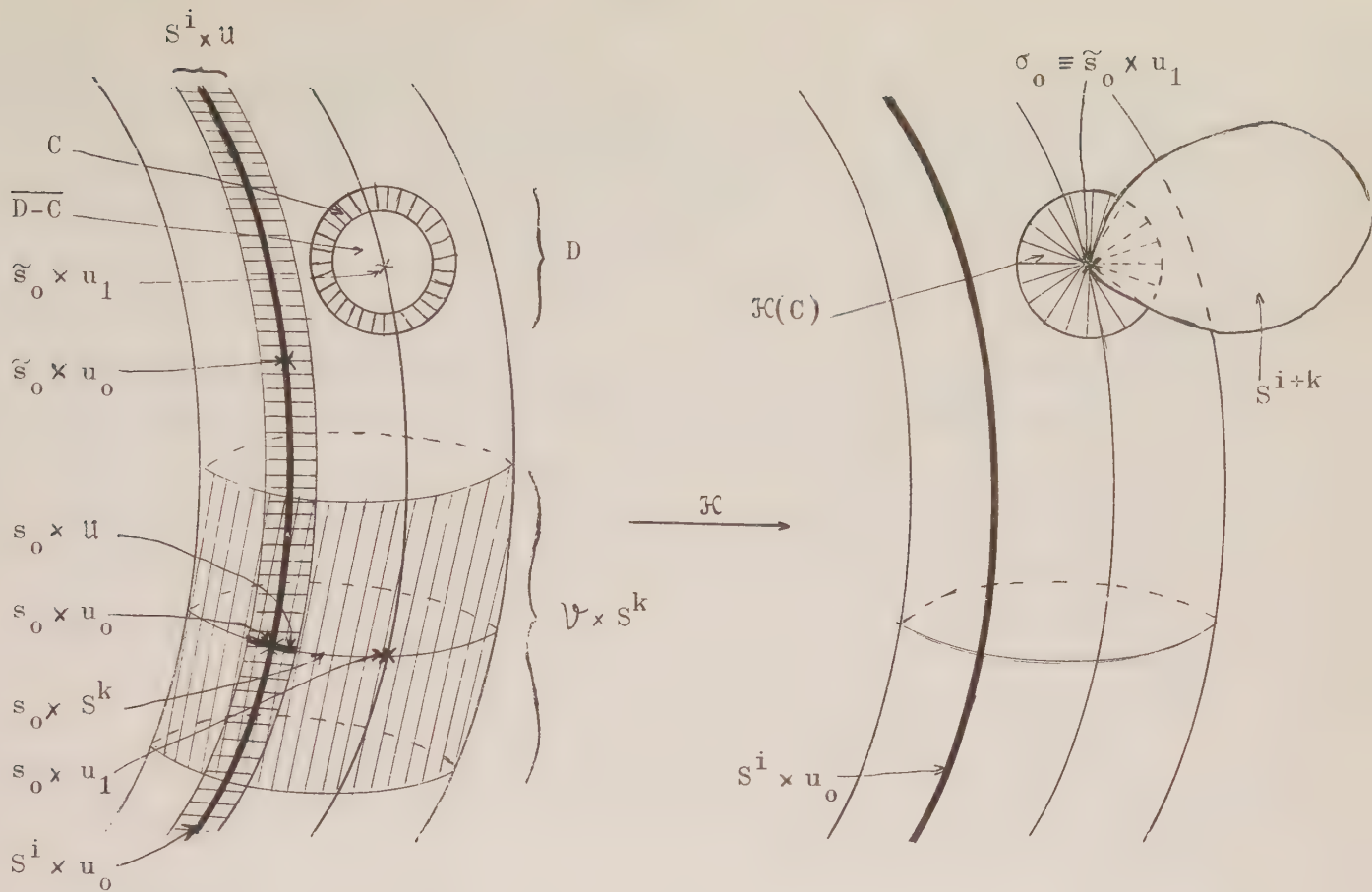


Figure 7

où l'indice φ_0 signifie que la restriction à $\partial(\overline{S^i - V})$ des applications considérées coïncide avec le plongement $\varphi_0|_{\partial(S^i - V)}$. Si la condition (C_k) est vérifiée, on déduit du théorème de Dax relatif [13] que $\hat{F}$ est homotope rel. le bord (et à travers des applications du même type) à une famille de plongements.

On définit ainsi un élément de $\pi_k(\text{Plgt}^0(S^i, M); \varphi_0)$ dont l'image par p_1 est la classe de f . Si la condition (C_{k+1}) est vérifiée, on définit ainsi une application

$$\eta: \pi_{i+k}(M - T_0; \tilde{m}_0) \rightarrow \pi_k(\text{Plgt}^0(S^i, M); \varphi_0)$$

qui est une section de p_1 . Démontrons enfin l'exactitude de la suite.

Soit $[F] \in \pi_k(\text{Plgt}^0(S^i, M); \varphi_0)$ tel que $p_1[F] = 0$. On considère une application $G: S^i \times S^k \rightarrow M$ qui représente $(t \xi[F]^{-1})[F]$ et qui vérifie $G^{-1}(T_0) \cong S_0 \times S^k$.

Il est clair que G représente 0 dans $\pi_k(\text{Hom}^0(S^i, M); \varphi_0)$ où Hom^0 est défini de manière analogue à Plgt^0 ; si $(C_{k+1})^{\text{que}}$ est vérifiée G représente 0 dans $\pi_k(\text{Plgt}^0(S^i, M); \varphi_0)$ ce qui montre $\frac{1}{[F]} = t \xi[F]$ et termine la démonstration du lemme 5.2.2.

5.2.3 Lemme :

- (1) Le morphisme $\mu_* : \pi_j(M - T_0; \tilde{m}_0) \rightarrow \pi_j(M; \tilde{m}_0)$ induit par l'inclusion est un isomorphisme pour $j \leq i-1$ et un monomorphisme pour $j \leq n-2$.
- (2) Il existe un morphisme $r : \pi_{i+k}(M; \tilde{m}_0) \rightarrow \pi_{i+k}(S^i; \tilde{s}_0)$ tel que $r(\varphi_0)_* = \text{identité}$.
- (3) Si $\pi_1(M) = \dots = \pi_{k+1}(M) = 0$, et si $k \leq \inf(n-3, n-i-2)$ la suite

$$0 \rightarrow \pi_{i+k}(M - T_0; \tilde{m}_0) \xrightarrow{\mu_*} \pi_{i+k}(M; \tilde{m}_0) \xrightarrow{r} \pi_{i+k}(S^i; \tilde{s}_0) \rightarrow 0$$

est exacte et scindée.

Démonstration : Le (1) a été démontré dans ([12], Appendice A). Pour le (2) r est simplement la construction de Thom-Pontryagin sur la sous-variété $f^{-1}(T_0) \subset S^{i+k}$, munie de la trivialisation induite par la trivialisation canonique de $v(T_0; M)$; il est clair que $r(\varphi_0)_* = \text{identité}$. En ce qui concerne le (3), nous allons montrer que si les conditions $k \leq \inf(n-3, n-i-1)$ sont remplies, l'élément $r[f] \in \pi_{i+k}(S^i; \tilde{s}_0)$ est la seule obstruction à pouvoir détacher $f(S^{i+k})$ de T_0 par une homotopie de f . C'est la version homotopique du théorème de R. Wells dont nous donnons ici un brève esquisse (rappelons que c'est à partir de là que dans [18] le théorème de Wells est démontré par une méthode d'engouffrement). Si $r[f] = 0$, il existe une sous-variété L de $S^{i+k} \times I$ dont le bord est $f^{-1}(T_0) \subset S^{i+k} \times \{0\}$, et une trivialisation de $v(L; S^{i+k} \times I)$ prolongeant la trivialisation de $v(f^{-1}(T_0); S^{i+k} \times \{0\})$ induite par la trivialisation canonique de $v(T_0; M)$. Si $k+1 \leq n-i$, on peut alors prolonger f en une application $\bar{f} : S^{i+k} \times \{0\} \cup \mathcal{L} \rightarrow M$ telle que $\bar{f}^{-1}(T_0) = L$, où $\mathcal{L}$ est un voisinage tubulaire de L dans $S^{i+k} \times I$. Les obstructions à prolonger $\bar{f}$ en une application F de $S^{i+k} \times I$ dans M telle que $F^{-1}(T_0) = \bar{f}^{-1}(T_0) = L$ sont dans les groupes

$$H^{j+1}(A, B; \pi_j(M-T_0)), \text{ où}$$

$$A = \overline{S^{i+k} \times I - \mathcal{L}},$$

et

$$B = \overline{S^{i+k} \times I - \mathcal{L} \cap (S^{i+k} \times \{0\} \cup \mathcal{L})}.$$

Ces groupes sont isomorphes aux $H^{j+1}(S^{i+k} \times I, S^{i+k} \times \{0\} \cup L; \pi_j(M-T_0))$ et sont nuls dès que $j+1 > k+2$. On en déduit que le prolongement F existe dès que $M-T_0$ est $(k+1)$ -connexe, ce qui arrive si M est $(k+1)$ -connexe et si de plus $k+1 \leq n-2$, ou encore $k \leq n-3$.

Le lemme 5.2.3 est ainsi démontré. Dans la suite, nous noterons

$p_2 : \pi_{i+k}(M; \widetilde{m}_0) \rightarrow \pi_{i+k}(M-T_0; \widetilde{m}_0)$ la rétraction de μ_* définie par

$$p_2(x) = y, \quad \mu_*(y) = x[(\varphi_0)_* r(x)]^{-1}$$

p_2 est bien définie dès que $k \leq \inf(n-3, n-i-2)$ et $\pi_1(M) = \dots = \pi_{k+1}(M) = 0$.

5.2.4 Proposition :

(1) Si $k \leq \inf(2n-3i-4, n-i-3)$ le morphisme $\pi\phi$ se factorise à travers un morphisme

$$P : \text{Coker } J_k \xrightarrow{\text{rel } T} \pi_k^0(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0).$$

(2) Si $k \leq i-1$, le morphisme $\xi\delta$ se factorise à travers un morphisme

$$Q : \pi_k^0(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0) \rightarrow \text{Ker } J_{k-1}$$

qui vérifie $QP = 0$ lorsque P est défini.

(3) Si $k \leq i-2$, il existe un morphisme $P' : \text{Ker } Q \rightarrow \text{Coker } J_k$ tel que $P'P = \text{identité}$; en particulier, P est monomorphisme.

Si $k \leq \inf(2n-3i-3, n-i-2, i-1)$, Q est un épimorphisme.

Démonstration de la proposition 5.2.4 :

Définition de P, P', Q : Le diagramme ci-dessous est commutatif lorsque les flèches sont définies : (On suppose $k \geq 2$; sinon $\text{Coker } J_k = \text{Ker } J_{k-1} = 0$).

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_k(SO(i)) & \xrightarrow{t} & \pi_k(\text{Plgt}^0(S^i, M); \varphi_0) & & \\
 J_k \downarrow & \textcircled{\text{I}} & \varepsilon_* \downarrow & & \\
 \pi_{i+k}(S^i; s_0) & \xrightarrow{\phi} & \pi_k(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0) & & \\
 \downarrow & & \pi \downarrow & & \\
 \text{Coker } J_k & & \text{rel } T_o \pi_k(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0) & & \text{Ker } J_{k-1} \\
 & & \delta \downarrow & & \downarrow \\
 & & \pi_{k-1}(\text{Plgt}^0(S^i, M); \varphi_0) & \xrightarrow{\xi} & \pi_{k-1}(SO(i)) \\
 & & \varepsilon_* \downarrow & \textcircled{\text{II}} & \downarrow J_{k-1} \\
 & & \pi_{k-1}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0) & \xrightarrow{\theta} & \pi_{i+k-1}(S^i; s_0)
 \end{array}$$

t est toujours définie (voir lemme 5.2.2),

ϕ est définie pour $k \leq \inf(2n-3i-4, n-i-3)$ (voir 5.2.1 Remarque (2)),

ξ est définie au niveau π_k pour $k \leq i-2$ (voir lemme 5.2.2).

On définit $\theta : \pi_k(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0) \rightarrow \pi_{i+k}(S^i; s_0)$ pour $k \leq i-2$ de la manière suivante :

$[F] \in \pi_k(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0)$ est représenté par $F : S^i \times S^k \rightarrow M$ avec $F|_{S^i \times u} = \varphi_0$ pour $u \in \underline{U}$, $\underline{U}$ = voisinage collier du point-base u_0 de S^k . La restriction de F à $S^k - \underline{U}$ définit naturellement une application $\hat{F} : S^i \times D^k \rightarrow M$ telle que

$$(1) \quad \partial \hat{F}^{-1}(T_o) \equiv s_0 \times \partial D^k.$$

$$(2) \quad \text{La trivialisation de } \nu(\hat{F}^{-1}(T_o); S^i \times D^k) \text{ induite par celle de } \nu(T_o; M) \text{ coïncide sur } \partial \hat{F}^{-1}(T_o) \text{ avec la trivialisation canonique de } \nu(s_0 \times \partial D^k; S^i \times \partial D^k).$$

Si $2k+1 \leq i+k$, c'est-à-dire $k \leq i-1$, on peut supposer que $\hat{F}^{-1}(T_0)$ ne rencontre $s_0 \times D_k$ que sur son bord. On procède alors comme au début de ce chapitre : on trouve un cobordisme normal rel. le bord entre $\hat{F}^{-1}(T_0)$ d'une part, la réunion de $s_0 \times D^k$ muni de la trivialisation canonique de $v(s_0 \times D^k; S^i \times D^k)$ et d'une variété sans bord d'autre part. Le résultat de cette opération est bien défini si $k \leq i-2$. On définit alors $\theta[F]$ de la manière habituelle, en utilisant la construction de Thom-Pontryagin dans $(S^i - s_0) \times D_k$.

On vérifie tout de suite que le diagramme (II) est commutatif dès que les flèches sont définies. (On peut remarquer aussi que, lorsque β est un isomorphisme (suite exacte (2) du 5.2.1), on a $\theta = r \beta^{-1}$).

La commutativité du diagramme (I) se ramène à celle du diagramme ci-dessous qui est classique :

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(SO(i)) & \xrightarrow{\alpha_*} & \pi_k(\text{Hom}_{s_0}(S^i, S^i); \text{id}) \\ \downarrow J_k & & \downarrow \cong \\ \pi_{i+k}(S^i; s_0) & = & \pi_k(\text{Hom}_{s_0}(S^i, S^i); C_{s_0}) \end{array}$$

Les notations sont calquées sur celles du 5.2.1, et

$\alpha: SO(i) \rightarrow \text{Diff}(S^i, s_0) \hookrightarrow \text{Hom}_{s_0}(S^i, S^i)$ est l'inclusion naturelle.

De la commutativité de (II) (pour l'indice $k-1$) on déduit l'existence de Q ; de la commutativité de (I) (pour l'indice k) on déduit l'existence de P .

Pour la définition de $P' : \text{Ker } Q \rightarrow \text{Coker } J_k$, on part d'une application $F: S^i \times D^k \rightarrow M$; si $k-1 < i$, on peut supposer que $\partial F^{-1}(T_0) \equiv s_0 \times \partial D^k$; si $k \leq i-1$ et si $Q[F] = 0$, on peut définir comme pour θ un élément de $\pi_{i+k}(S^i; s_0)^\diamond$. On voit facilement que si $k \leq i-2$, le résultat est bien

$^\diamond Q[F]$ est l'inverse de l'obstruction à l'existence d'un cobordisme normal entre $F^{-1}(T_0)$ et $s_0 \times D^k \cup V^k$, $\partial V^k = \emptyset$.

défini dans Coker J_k (comparer à la bonne définition de χ dans le paragraphe 5.1. Ici $\pi_k(SO(i))$ n'est pas forcément nul, mais on peut annuler l'obstruction à la chirurgie trivialisée en ajoutant à l'application $H: S^i \times D^k \times I \rightarrow M$ une application K du même type représentant une homotopie entre deux représentants de $0 \in \pi_k^{\text{rel } T}{}^0(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0)$ (voir figure 8).

On vérifie que $P'P = \text{identité}$, donc P est monomorphisme. Remarquons que $\text{Im } P \subset \text{Ker } \delta \subset \text{Ker } Q$, et que la restriction de P' à $\text{Ker } \delta$ coïncide avec le morphisme induit par θ .

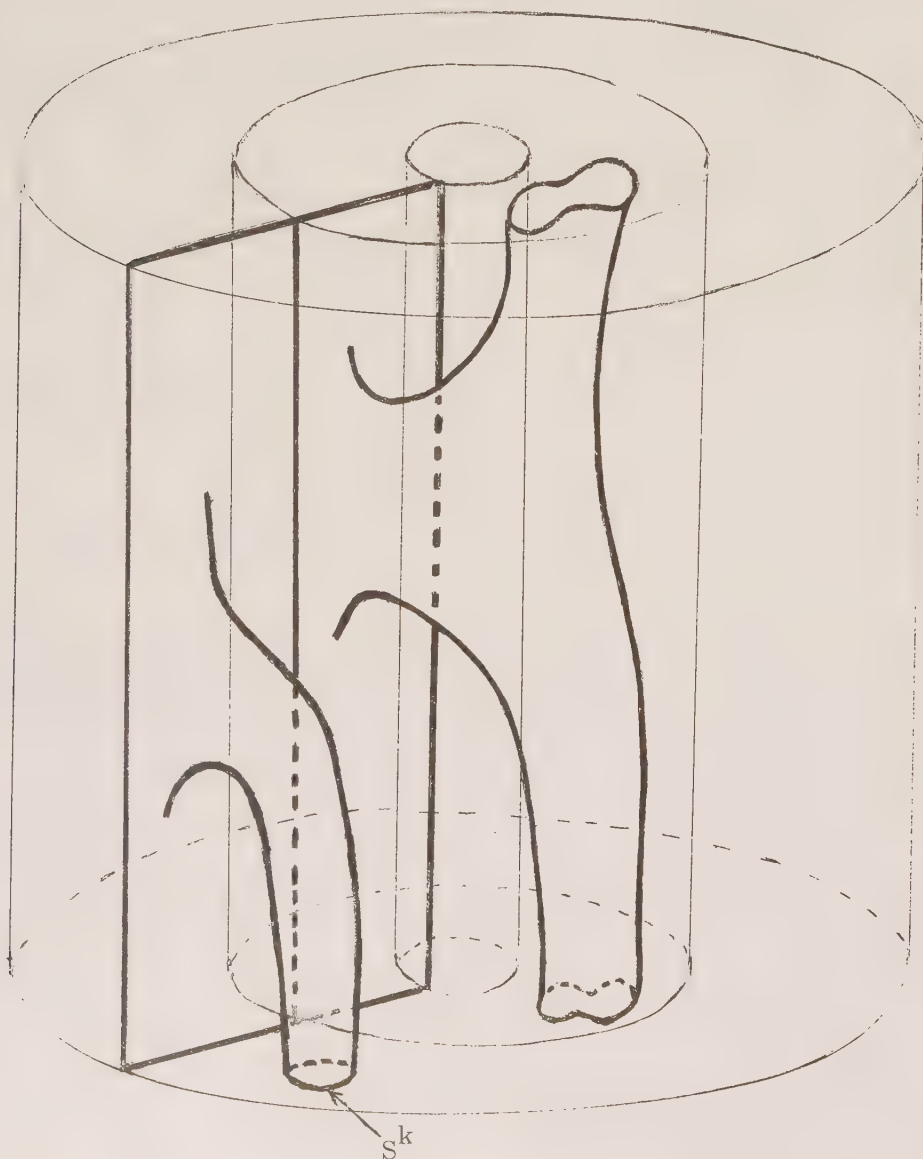


Figure 8

Il reste à vérifier que Q est un épimorphisme. Ceci vient de la naturalité de Q pour l'inclusion $\text{int } N \rightarrow M$ où N est un voisinage tubulaire de $\varphi_0(S^i)$ dans M , et de ce que dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_{k-1}(\text{Plgt}^0(S^i, \text{int } N); \varphi_0) & \xrightarrow{\xi} & \pi_{k-1}(S^0(i)) \\ \varepsilon_* \downarrow & & \downarrow J_{k-1} \\ \pi_{k-1}(\text{Plgt}(S^i, \text{int } N); \varphi_0) & \xrightarrow{\theta} & \pi_{i+k-1}(S^i; s_0) \end{array}$$

ξ est surjectif, et θ injectif dès que $k \leq \inf(2n-3i-3, n-i-2, i-1)$ (c'est même un isomorphisme).

Nous allons maintenant introduire des hypothèses de connexité sur M :

5.2.5 Lemme : Si $k \leq \inf(2n-3i-3, n-i-2, n-2i+1(\varphi_0)-1, i-1)$, et si $\pi_k(M) = 0$, on a $\text{Ker } Q = \text{Ker } \delta$.

Démonstration : On a $\text{Ker } \delta \subset \text{Ker } Q$; pour l'inclusion dans l'autre sens, on utilise l'injectivité de $\beta\mu_*$ (voir lemme 5.2.3 et suite exacte (2) du 5.2.1), et l'exactitude de la suite horizontale médiane dans le diagramme ci-dessous (voir lemme 5.2.2)

$$\begin{array}{ccccc} & \text{rel } T_0 & & \downarrow \cup & \\ & \pi_k^0(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0) & \xrightarrow{Q} & \text{Ker } J_{k-1} & \\ & \delta \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow \pi_{i+k-1}(M-T_0, \widetilde{m}_0) & \xrightarrow{\eta} \pi_{k-1}(\text{Plgt}^0(S^i, M); \varphi_0) & \xrightarrow{\xi} & \pi_{k-1}(S^0(i)) \rightarrow 0 & \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \varepsilon_* & & \\ 0 \rightarrow \pi_{i+k-1}(M-T_0, \widetilde{m}_0) & \xrightarrow{\beta\mu_*} \pi_{k-1}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0) & & & \end{array}$$

Remarquons que les conditions du lemme sont en particulier satisfaites si $\pi_1(M) = \dots = \pi_{k+1}(M) = 0$, et si $2i \leq n$, $k+1 \leq i$, et $n \leq 2k+6$.

Nous allons chercher dans quelles conditions $P: \text{Coker } J_k \rightarrow \text{Ker } \delta$ est un isomorphisme.

5.2.6 Lemme : Si $\pi_1(M) = \dots = \pi_{k+1}(M) = 0$, et si $k \leq \inf(2n-3i-4, n-i-3, n-2i+1(\varphi_0)-2, i-2)$, $P: \text{Coker } J_k \rightarrow \text{Ker } \delta$ est un isomorphisme.

Démonstration : Il reste à voir que P est épimorphisme. Ceci découle du diagramme ci-dessous où la suite horizontale médiane est exacte, et où p_1 est surjective :

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_k(\text{Plgt}^0(S^i, M); \varphi_0) & \xrightarrow{p_1} & \pi_{i+k}(M-T_0; \tilde{m}_0) & \rightarrow & 0 \\
 \downarrow \varepsilon_* & & \parallel \text{id} & & \\
 \pi_{i+k}(S^i; \tilde{s}_0) & \xrightarrow{\phi} \pi_k(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0) & \xrightarrow{p_2^{\beta-1}} & \pi_{i+k}(M-T_0; \tilde{m}_0) & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \text{Coker } J_k & \xrightarrow{P} & \text{Ker } \delta & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Les conditions du lemme ne sont pas satisfaisantes car si $\pi_{k+2}(M) \neq 0$, il faut $k \leq n-2i+k+1-2$, c'est-à-dire $2i+1 \leq n$, et on n'atteint pas $\frac{n}{2}$. Cependant, on a

5.2.7 Corollaire : Si $\pi_1(M) = \dots = \pi_{k+2}(M) = 0$, et si $n \geq 2k+8$, $k+2 \leq i \leq n-(k+2)$, on a un isomorphisme

$$\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h); \varepsilon_0) \xrightarrow{\cong} \text{Coker } J_k \oplus \text{Ker } J_{k-1}.$$

Le corollaire découle des lemmes 5.2.4, 5.2.5, 5.2.6, et de l'isomorphisme $\mathfrak{D}$ de dualité vu en 5.2.0, compte-tenu de la liberté de $\text{Ker } J_{k-1}$.

Ce corollaire a un intérêt pour $M = S^i \times S^{n-i}$ par exemple, c'est-à-dire lorsque M est variété intermédiaire d'une fonction ayant deux points critiques, $h: S^n \times I \rightarrow I$.

Cependant, en acceptant de moins bonnes conditions de dimension, on peut montrer que P' est monomorphisme sans la condition parasite sur $\pi_{k+2}(M)$ et même sans condition sur $\pi_{k+1}(M)$. Pour cela, on se place dans le domaine métastable $3(i+k) < 2n$, et on utilise le théorème de Wells [30]. C'est possible car une application $F: S^i \times D^k \rightarrow M$ est génériquement un plongement sur le complémentaire d'une sous-variété U (à bord) de dimension $2(i+k)-n$ de $S^i \times D^k$.

On commence, grâce à une isotopie ambiante de $S^i \times S^{k-1}$ qui respecte la projection sur S^{k-1} , par se ramener au cas où $\partial F^{-1}(T_0) \equiv s_0 \times \partial D^k$; c'est possible dès que $k-1 < i$. Si $2k+1 \leq i+k$, ou $k \leq i-1$, on peut supposer par position générale que $s_0 \times D^k$ et $F^{-1}(T_0)$ ne se rencontrent que suivant leur bord commun^{*}; si $k+2(i+k)-n+1 \leq i+k$, ou $2k+1 \leq n-i$, on peut supposer, toujours par position générale, que la restriction de F à un voisinage de $s_0 \times D^k \cup F^{-1}(T_0)$ est un plongement. Si $[F] \in \text{Ker } Q \subset \pi_k^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0)$, si on peut plonger un disque de dimension $k+1$ dans M et le disjoint de $F(S^i \times D^k)$ et T_0 respectivement (en particulier si $\pi_k(M) = 0$, $(i+k)+k+1 < n$, $(n-i)+k+1 < n$, $2(k+1) < n$) et si $\pi_k(V_{n-k-1, i-1}) = 0$ (c'est-à-dire $k < n-k-1-i+1$) on peut, par une isotopie de T_0 de support disjoint de $F(S^i \times \partial D^k \cup U)$, transformer $F^{-1}(T_0)$ en la réunion de $s_0 \times D^k$ et d'une variété sans bord $\Lambda^k \subset (S^i - s_0) \times D^k - U$. Grâce au théorème de relèvement des isotopies, on peut réaliser cette modification par une isotopie de F fixe sur $S^i \times \partial D^k \cup U$ en restant dans l'espace des applications de (D^k, S^{k-1}, s_0) dans $(\text{Plgt}(S^i, M), \text{Plgt}^0(S^i, M), \varphi_0)$. Si $P'[F] = 0 \in \text{Coker } J_k$, il existe dans $(S^i - s_0) \times D^k \times I$ un cobordisme normal entre Λ^k et une sphère S^k .

Le théorème de R. Wells est non seulement un théorème de disjonction mais aussi un théorème de réalisation par isotopie de certaines modifications d'une intersection. En particulier ici, il permet, si certaines conditions d'homotopie et de dimensions sont satisfaites, de modifier Λ^k en S^k , à condition de pouvoir faire toutes les opérations en dehors de U . En remarquant qu'il n'y a pas de chirurgie à faire en dimension

* N'oublions pas que toute modification suffisamment petite d'une famille de plongements la transforme en une famille de plongements.

maximum, ce qui supprime la condition sur $\pi_{k+1}(M)$, on trouve les conditions $\pi_1(M) = \dots = \pi_k(M) = 0$, en plus des conditions précédentes. On peut tout faire en dehors de U dès que $k+2(i+k)-n < i+k$ qui est déjà vérifiée. On arrive ainsi à représenter $[F]$ par une application $F: S^i \times D^k \rightarrow M$ telle que $F^{-1}(T_0) = s_0 \times D^k \cup S^k$. Puisque $\pi_1(M) = 0$, et étant donné les conditions de dimension, on peut alors se ramener à une application F telle que $F^{-1}(T_0) = s_0 \times D^k \# S^k$. Puisque $(k+1)+2(i+k)-n < i+k$, il existe une isotopie ambiante de $S^i \times D^k$ fixe sur $S^i \times \partial D^k \cup U$, qui amène $F^{-1}(T_0)$ sur $s_0 \times D^k$. On en déduit comme d'habitude que $[F] = 0$. On a donc démontré le

5.2.8 Théorème : Si $\pi_1(M) = \dots = \pi_k(M) = 0$, si $n \geq 6k+1$, et si $k+2 \leq i \leq n-(k+2)$, on a un isomorphisme

$$\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h); \varepsilon_0) \xrightarrow{\cong} \text{Coker } J_k \oplus \text{Ker } J_{k-1}.$$

Il suffit de rassembler les conditions de dimension qui précèdent et celles de la proposition 5.2.4 en se limitant à $i \leq \frac{n}{2}$ ♦, puis d'appliquer l'isomorphisme $\mathfrak{D}$ de dualité.

5.2.9 Remarques :

- (1) En se plaçant dans un domaine de dimensions favorable, on voit que l'homotopie de M intervient essentiellement à travers l'homologie du complexe

$$0 \rightarrow \pi_{i+k}(M-T_0; \widetilde{m}_0) \xrightarrow{\mu_*} \pi_{i+k}(M; \widetilde{m}_0) \xrightarrow{r} \pi_{i+k}(S^i; \widetilde{s}_0) \rightarrow 0.$$

Cette homologie correspond à des obstructions à détacher de T_0 une $(i+k)$ -sphère de M , et ne fait intervenir que $\pi_1(M), \dots, \pi_{k+1}(M)$.

- (2) Il ne suffit pas, pour qu'un élément de $\pi_k^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi_0)$ soit nul, qu'il soit représenté par une application $F: S^i \times D^k \rightarrow M$ telle

♦ On trouve en fait la condition supplémentaire $n \geq 2k+8$ qui est effective pour $k=1$; cependant, on voit directement dans ce cas que cette condition n'intervient pas car $\text{Coker } J_k$ et $\text{Ker } J_{k-1}$ sont nuls.

que $F^{-1}(T_0) \cong D^k$. En effet, c'est le cas de tout élément qui s'écrit $P(x)$, où $x \in \mathbb{W}_k / b P_{k+1} \subset \text{Coker } J_k$. En effet, un tel élément est représenté par un F avec $F^{-1}(T_0) = s_0 \times D^k \cup \Sigma^k$, où Σ est une k -sphère homotopique, et donc aussi par un F avec $F^{-1}(T_0) = s_0 \times D^k \# \Sigma \cong D^k$. Ceci se produit très souvent, puisque d'après W. Browder,

$$\mathbb{W}_k / b P_{k+1} \cong \text{Coker } J_k \text{ pour } k \neq 2^l - 2 \quad (\text{voir } [1]).$$

L'explication de ce phénomène tient à la non existence d'une isotopie rel. le bord dans $S^i \times D^k$ entre $s_0 \times D^k \# \Sigma^k$ et $s_0 \times D^k$; en effet, le paramétrage standard de $s_0 \times \partial D^k$ ne se prolonge pas en un paramétrage de $s_0 \times D^k \# \Sigma^k$.

5.3 Interprétation en liaison avec le théorème d'unicité faible des éliminations (à paramètres) sur un cobordisme élémentaire

5.3.1 Dans ce paragraphe, nous faisons le lien entre le calcul d'obstructions effectué dans les paragraphes 5.1 et 5.2, et les théorèmes démontrés a priori dans les chapitres précédents, en particulier les résultats des paragraphes 3.5.1 et 3.5.2.

Nous reproduisons, en les modifiant légèrement, deux figures provenant des chapitres précédents (figure 24 du chapitre 3 et figure 3 du chapitre 4) afin de rappeler les notations (en général ce sont celles de [12]).

W est un cobordisme élémentaire d'indice $i+1$, et $h: W \rightarrow \mathbb{R}$ a trois points critiques (d_0, d_1, a) d'indices respectivement $(i+1, i+1, i)$. Le couple (d_0, a) est en position de s'éliminer, et on s'intéresse à $\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h; a, d_0); \varepsilon_0)$, où ε_0 est un chemin élémentaire d'élimination choisi comme point-base. Avec les notations du paragraphe 1.4.6^{♦♦}, on a

$$\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h; a, d_0); \varepsilon_0) \cong \pi_k^{\text{rel } T}(\text{Plgt}(S^i M); \phi_0).$$

♦ Notations de Kervaire-Milnor [16].

♦♦ La seule différence est que le couple (c_1, c_2) s'appelle maintenant (a, d_0) .

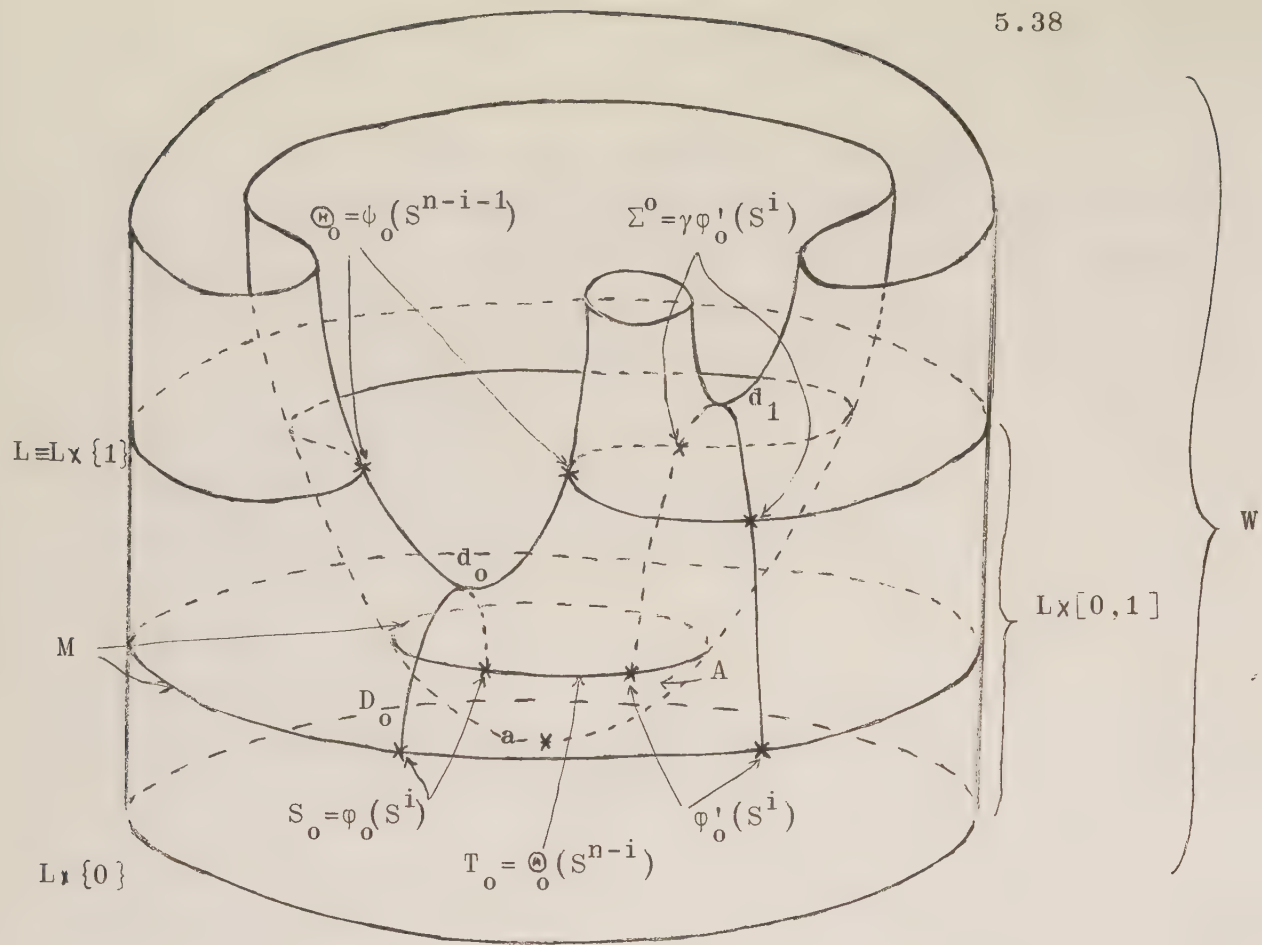


Figure 9 [h est la fonction hauteur].

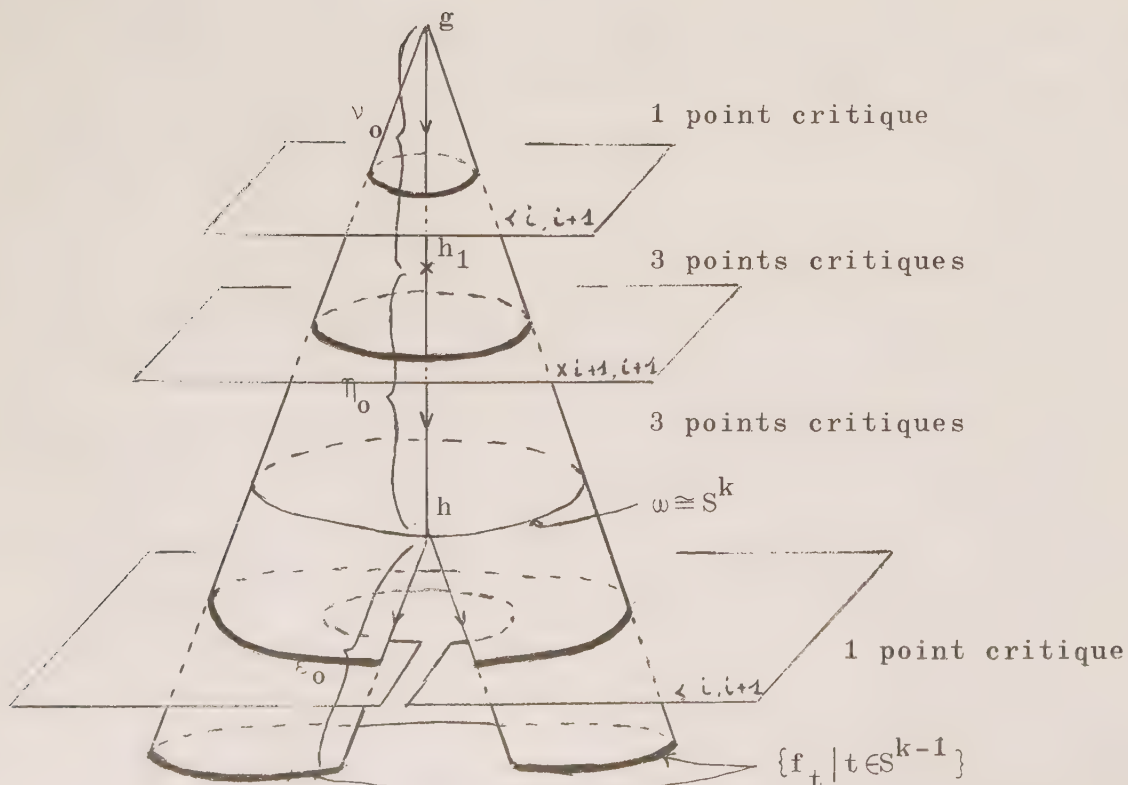


Figure 10 (dans l'espace fonctionnel).

Une métrique riemannienne $\mathfrak{M}$ est fixée sur W : le chemin élémentaire ε_0 est associé au couple (D_0, A) de nappes de gradient issues de (d_0, a) et limitées à la variété de niveau M , intermédiaire entre d_0 et a .

La métrique riemannienne $\mathfrak{M}$ détermine un difféomorphisme $\gamma : M - S_0 \rightarrow L - \textcircled{D}_0$, où L est une variété de niveau de h située immédiatement au-dessus de d_0 (donc en-dessous de d_1) et où $\textcircled{D}_0$ est le bord dans L de la nappe de gradient de h montant de d_0 .

On appelle $\varphi'_0 : S^1 \rightarrow M - S_0$ un plongement isotope dans M à φ_0 tel que $\gamma \varphi'_0(S^1)$ soit identique au bord Σ_0 dans L de la nappe de gradient de h descendant de d_1 (voir figure 9). On a encore un isomorphisme

$$\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h; a, d_0); \varepsilon_0) \cong \pi_k^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^1, M); \varphi'_0) \quad .$$

Soit η_0^{-1} un chemin élémentaire de croisement (voir [4]) d'origine h , réalisant le croisement de d_1 et d_0 , et "associé" à la nappe de gradient de h descendant de d_1 jusqu'à un niveau compris entre celui de d_0 et celui de M . L'extrémité h_1 de ce chemin est une fonction de Morse excellente ayant trois points critiques (d_0, d_1, a) , le couple (d_1, a) étant en position de s'éliminer.

On appelle v_0^{-1} un chemin élémentaire d'élimination d'origine h_1 (et relatif au couple (d_1, a)) "associé" au couple de nappes de gradient de h_1 (et aussi de h) issues de d_1 et a et limitées au niveau M (qui est intermédiaire à la fois pour h et h_1). Les chemins ε_0 , η_0 et v_0 sont représentés sur la figure 10. On note g l'extrémité du chemin v_0^{-1} : c'est une fonction de Morse excellente ayant pour seul point critique le point d_0 (son indice est $i+1$).

Rappelons que l'espace $\Gamma(h; d_0, d_1)$ des bons chemins de croisement d'origine h relatifs au couple (d_0, d_1) a même type d'homotopie faible que l'espace des nappes adaptées à h descendant de d_1 jusqu'à un niveau inférieur à celui de d_0 ([4], chapitre II, § 3, corollaire de la proposition 2). On en déduit (par l'intermédiaire de la métrique $\mathfrak{M}$) un

isomorphisme naturel :

$$\pi_k(\Gamma(h; d_0, d_1); \eta_0^{-1}) \cong \pi_{k+1}(\text{Plgt}(S^i, L), \text{Plgt}(S^i, L - \odot_0); \gamma \varphi'_0) .$$

Mais d_0 et d_1 jouant un rôle symétrique, on a aussi un isomorphisme naturel

$$\pi_k(\Gamma(h_1; d_0, d_1); \eta_0) \cong \pi_{k+1}(\text{Plgt}(S^i, L), \text{Plgt}(S^i, L - \odot_0); \gamma \varphi'_0) .$$

(Remarquer que η_0 est homotope à un chemin élémentaire de croisement d'origine h_1 "associé" à la nappe de gradient de h_1 descendant de d_0 jusqu'à un niveau inférieur à celui de d_1 ; en effet, cette nappe est aussi de gradient pour h , et est donc disjointe de la nappe de gradient de h descendant de d_1).

Enfin, soit $\mathcal{A}(g; i)$ l'espace des bons chemins de naissance d'origine g correspondant à la naissance d'un couple de points critiques d'indices i et $i+1$ à un niveau inférieur à celui de d_0 (c'est-à-dire à un niveau difféomorphe à L). On déduit de la proposition 1.5.2 une suite exacte

$$\dots \rightarrow \pi_k([0(i) \times 0(n-i)]^+; id) \rightarrow \pi_k(V_n(\tau L); \mathbf{v}_0) \rightarrow \pi_k(\mathcal{A}(g; i); \mathbf{v}_0) \xrightarrow{\cong} \pi_{k-1}([0(i) \times 0(n-i)]^+; id) \rightarrow \dots$$

où $V_n(\tau L)$ est la variété des n -repères tangents à L ($\mathbf{v}_0$ est un point-base de cet espace) et où le morphisme de $\pi_k([0(i) \times 0(n-i)]^+; id)$ dans $\pi_k(V_n(\tau L); \mathbf{v}_0)$ se factorise à travers le morphisme induit par l'inclusion naturelle de $[0(i) \times 0(n-i)]^+$ dans $SO(n)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'interpréter le calcul de $\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h; a, d_0); \varepsilon_0)$ en fonction des groupes $\pi_j(\Gamma(h_1; d_0, d_1); \eta_0)$ et $\pi_j(\mathcal{A}(g; i); \mathbf{v}_0)$. L'existence d'une telle interprétation est suggérée par les résultats des paragraphes 3.5.1 et 3.5.2 et en particulier par la figure 10 du présent paragraphe.

On définit un morphisme

$$\Delta_k : \pi_{k+1}(\mathcal{A}(g; i); \nu_o) \rightarrow \pi_k(\Gamma(h_1; d_o, d_1); \eta_o)$$

de la manière suivante : l'application "extrémité d'un chemin" induit un morphisme de $\pi_{k+1}(\mathcal{A}(g; i); \nu_o)$ dans $\pi_{k+1}(\Sigma; h_1)$, où Σ désigne la composante connexe (cocellule) de la strate de h_1 ; étant donnée une application de $(S^{k+1}, *)$ dans (Σ, h_1) , on la relève en une application de D^{k+1} dans $\text{Diff } W \times \text{Diff } \mathbb{R}$ grâce à laquelle on transporte le chemin élémentaire de croisement η_o : on obtient ainsi une application de D^{k+1} dans l'espace des chemins de croisement (d'origine variable) dont le bord définit l'élément cherché dans $\pi_k(\Gamma(h_1; d_o, d_1); \eta_o)$.

De la même manière, on définit un morphisme

$$R_k : \pi_k(\Gamma(h_1; d_o, d_1); \eta_o) \rightarrow \pi_{k-1}(\mathcal{C}(h; a, d_o); \varepsilon_o) \quad .$$

Plaçons-nous maintenant dans des conditions de dimension telles que l'espace $Q(g; d_o)$ des chemins en queue d'aronde d'origine g soit k -connexe ; c'est le cas (voir 3.5.1 et 3.5.2) si

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq n-3 & \text{pour } k=0 \\ 2 \leq i \leq n-5 & \text{pour } k=1 \\ k+1 \leq i \text{ et } n-2i \geq 2k-1 & \text{pour } k \geq 2. \end{cases}$$

On peut alors définir un morphisme

$$S_k : \pi_{k-1}(\mathcal{C}(h; a, d_o); \varepsilon_o) \rightarrow \pi_k(\mathcal{A}(g; i); \nu_o)$$

de la manière suivante : l'application qui à un chemin d'élimination ε associe le chemin en queue d'aronde $\nu_o * \eta_o * \varepsilon$ induit un morphisme

$$H_{k-1} : \pi_{k-1}(\mathcal{C}(h; a, d_o); \varepsilon_o) \rightarrow \pi_{k-1}(Q(g; d_o); \nu_o * \eta_o * \varepsilon_o) \quad .$$

Si $\alpha \in \pi_{k-1}(\mathcal{C}(h; a, d_o); \varepsilon_o)$, on définit $S_k(\alpha)$ comme l'élément de $\pi_k(\mathcal{A}(g; i); \nu_o)$ qui provient d'une homotopie à 0 de l'élément $H_{k-1}(\alpha)$: une telle définition est consistante si $\pi_k(Q(g; d_o); \nu_o * \eta_o * \varepsilon_o) = 0$ (voir sur la figure 10 le cas où $k=1$).

5.3.2 Théorème :

Dans les conditions de dimension qui précèdent, il existe un morphisme naturel de suites exactes :

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{k+1}(\mathcal{A}(g; i); v_o) & \xrightarrow{U_k} & \pi_k(\text{Plgt}^o(S^i, M); \varphi'_o) \\
 \Delta_k \downarrow & & \downarrow \varepsilon_* \\
 \pi_k(\Gamma(h_1; d_o, d_1); \eta_o) & \xrightarrow{V_k} & \pi_k(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi'_o) \\
 R_k \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \pi_{k-1}(\mathcal{C}(h; a, d_o); \varepsilon_o) & \cong & \pi_k^{\text{rel } T^o}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi'_o) \\
 S_k \downarrow & & \downarrow \delta \\
 \pi_k(\mathcal{A}(g; i); v_o) & \xrightarrow{U_{k-1}} & \pi_{k-1}(\text{Plgt}^o(S^i, M); \varphi'_o) \\
 \Delta_{k-1} \downarrow & & \downarrow \varepsilon_* \\
 \pi_{k-1}(\Gamma(h_1; d_o, d_1); \eta_o) & \xrightarrow{V_{k-1}} & \pi_{k-1}(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi'_o) \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Démonstration :

(1) Les morphismes U_k et V_k sont définis par le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{k+1}(\mathcal{A}(g; i); v_o) & \xrightarrow{\Delta_k} & \pi_k(\Gamma(h_1; d_o, d_1); \eta_o) \\
 \partial \downarrow & & \parallel \\
 \pi_k([0(i) \times 0(n-i)]^+; id) & & \pi_{k+1}(\text{Plgt}(S^i, L), \text{Plgt}(S^i, L \oplus \mathbb{C}_o); \gamma \varphi'_o) \\
 \text{projection} \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_k(0(i); id) & & \pi_k(\text{Plgt}(S^i, L \oplus \mathbb{C}_o); \gamma \varphi'_o) \\
 t \downarrow & & \downarrow \gamma_*^{-1} \\
 \pi_k(\text{Plgt}^o(S^i, M); \varphi'_o) & & \pi_k(\text{Plgt}(S^i, M - S_o); \varphi'_o) \\
 & \searrow \varepsilon_* & \downarrow \\
 & & \pi_k(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi'_o)
 \end{array}$$

U_k (curved arrow from $\pi_{k+1}(\mathcal{A}(g; i); v_o)$ to $\pi_k(\text{Plgt}^o(S^i, M); \varphi'_o)$) and V_k (curved arrow from $\pi_k(\Gamma(h_1; d_o, d_1); \eta_o)$ to $\pi_k(\text{Plgt}(S^i, M); \varphi'_o)$)

(2) La suite verticale de gauche (dans l'énoncé du théorème 5.3.2) est exacte :

les composées $R_k \Delta_k$, $S_k R_k$, et $\Delta_{k-1} S_k$ sont nulles par définition ; d'autre part on construit immédiatement un morphisme

$$\sigma_k : \text{Ker } \Delta_{k-1} \rightarrow \pi_{k-1}(\mathcal{C}(h; a, d_o); \varepsilon_o) / \text{Im } R_k$$

tel que $S_k \sigma_k = \text{identité}$, ce qui montre l'exactitude au point $\pi_k(\mathcal{A})$; on montre de même l'exactitude au point $\pi_{k-1}(\mathcal{C})$. Enfin, la k -connexité de l'espace $Q(g; d_o)$ montre l'exactitude au point $\pi_k(\Gamma)$.

5.3.3 Remarque : On rapprochera la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Coker } \Delta_k \rightarrow \pi_{k-1}(\mathcal{C}(h; a, d_o); \varepsilon_o) \rightarrow \text{Ker } \Delta_{k-1} \rightarrow 0$$

(valable sans condition de connexité sur M) de la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Coker } J_k \rightarrow \pi_{k-1}(\mathcal{C}(h; a, d_o); \varepsilon_o) \rightarrow \text{Ker } J_{k-1} \rightarrow 0$$

(valable lorsque M est k -connexe).

En particulier, si $L = S^n$ (donc $M \cong S^i \times S^{n-i}$), les deux suites exactes du théorème 5.3.2 sont isomorphes à la suite

$$\pi_k(0(i); id) \xrightarrow{J_k} \pi_{i+k}(S^i) \rightarrow \text{Coker } J_k \oplus \text{Ker } J_{k-1} \rightarrow \pi_{k-1}(0(i); id) \xrightarrow{J_{k-1}} \dots$$

5.3.4 Existe-t-il des éléments exotiques dans $\pi_k(\text{Diff } D^{n+1})$ (n grand) dès que $k \geq 1$?

Soit $h : S^n \times I \rightarrow I$ une fonction de Morse ayant deux points critiques c_1, c_2 , d'indices respectivement i et $i+1$; soit $\mathcal{E}(S^n \times I)$ le sous-espace de $\mathfrak{F}(S^n \times I)$ formé des fonctions sans point critique. Il est bien connu (voir [4]) que $\mathcal{E}(S^n \times I)$ a même type d'homotopie que l'espace $\text{Diff}(S^n \times I, S^n \times \{0\})$ des pseudo-isotopies sur S^n .

L'application qui à un chemin de fonctions associe son extrémité envoie $\mathcal{C}(h; c_1, c_2)$ dans $\mathcal{E}(S^n \times I)$, ce qui fournit un morphisme

$$\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h; c_1, c_2)) \rightarrow \pi_{k-1}(\text{Diff}(S^n \times I, S^n \times \{0\})) .$$

Si $k = 2$ et $4 \leq i \leq n-4$, ou si $k > 2$, $n \geq 2k+8$ et $k+2 \leq i \leq n-(k+2)$, on déduit du corollaire 5.2.7 un morphisme

$$E_{k-1}(h, c_1, c_2) : \text{Coker } J_k \oplus \text{ker } J_{k-1} \rightarrow \pi_{k-1}(\text{Diff}(S^n \times I, S^n \times \{0\})) .$$

Si $E_{k-1}(h, c_1, c_2)$ n'est pas nul, on aurait les premiers exemples d'éléments de $\pi_{k-1}(\text{Diff } D^{n+1})$ ne provenant pas de $\pi_{k-1}(SO(n+1))$ ($k \geq 2$) ; en effet, on a rappelé dans l'introduction l'isomorphisme

$$\pi_{k-1}(\text{Diff } D^{n+1}) \cong \pi_{k-1}(SO(n+1)) \oplus \pi_{k-1}(\text{Diff}(S^n \times I, S^n \times \{0\})) .$$

5.3.5 Remarque : On voudrait montrer que la nullité de E_{k-1} ne dépend pas de (h, c_1, c_2) (en particulier de l'indice i) ; on commence par regarder le problème suivant : montrer qu'une famille à $(k-1)$ paramètres de chemins élémentaires d'élimination $(i+1, i+2)$ obtenue par translation des indices à partir d'une famille non triviale de chemins d'élimination $(i, i+1)$ ne peut pas être triviale. Il est facile de montrer ceci dans le cas où l'espace $Q'(h, c)$ des chemins de graphique comme sur la figure 11 issus de h est k -connexe.

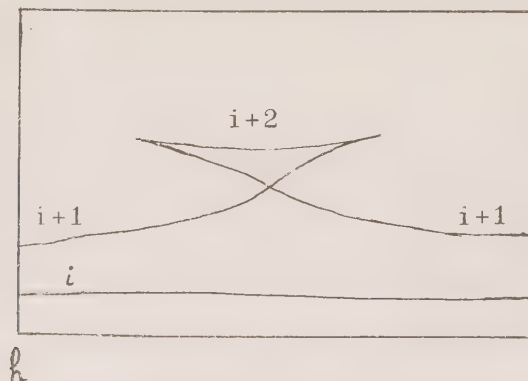


Figure 11

Mais la k -connexité de $Q'(h, c)$ équivaut à la k -connexité de l'espace $Q(1-h, c)$ des chemins en queue d'aronde issus d'une fonction ayant un point critique d'indice $n+1 - (i+1) = n-i$.

Malheureusement, les conditions dans lesquelles nous démontrons le théorème de translation des indices à $(k-1)$ paramètres (pratiquement celles de la $(k-1)$ -connexité de l'espace des chemins en queue d'aronde issus d'une fonction ayant un point critique d'indice $i+1$) sont presque toujours incompatibles avec les conditions dans lesquelles on sait montrer la k -connexité de $Q(1-h, c)$ (il faudrait $i < n/2$ et $i > n/2$).

Seul le cas $k=1$ est privilégié (on retrouve alors le résultat de la fin du chapitre 4). Lorsque $k=2$, on sait faire la translation pour $n \geq 7$, $i \leq n-5$, et on n'a la 2-connexité de $Q(1-h, c)$ que pour $i \leq n-4$ et $2i \geq n+1$; ce dernier résultat semble améliorable : compte-tenu de la construction, dans le paragraphe 5.1, du générateur de $\pi_1(\mathcal{C}(h; c_1, c_2)) \cong \mathbb{Z}_2$, on doit pouvoir imiter la démonstration du paragraphe 3.6 de [12] ; une autre voie serait de généraliser le théorème 3.1.2 à des familles à 3 paramètres de plongements : on peut s'attendre à trouver comme conditions $n \geq 9$ et $i \leq n-7$.

Remarquons pour finir que si on peut montrer, pour certains indices i , que l'espace des chemins en queue d'aronde d'origine une fonction ayant un point critique d'indice $i+1$ est k -connexe et qu'il en est de même de l'espace analogue où on remplace $i+1$ par $n-i$, on aura montré que la translation des indices définit un automorphisme de groupes de $\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h; c_1, c_2); \varepsilon_0)$ sur $\pi_{k-1}(\mathcal{C}(h'; c'_1, c'_2); \varepsilon'_0)$, où h a deux points critiques c_1, c_2 d'indices $i, i+1$, et où h' est obtenue à partir de l'extrémité de ε_0 en faisant naître un couple (c'_1, c'_2) des points critiques d'indices $i+1, i+2$. Pour l'étude de $E_{k-1}(h, c_1, c_2)$, il suffira alors de raisonner sur un indice i particulier.



B I B L I O G R A P H I E

- [0] W. BROWDER : Open and closed disk bundles, Annals of Math. vol. 83 (1966) p. 218-230.
- [1] W. BROWDER : The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization, Annals of Math. vol. 90 n°2 (Sept. 1969) p. 157-186.
- [2] J. CERF : Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. Math. France 89, 1961, p. 227-380.
- [3] J. CERF : Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$), Lecture Notes in Math. n°53, Springer 1968.
- [4] J. CERF : La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie, (preprint Orsay) à paraître aux publications mathématiques de l'IHES.
- [5] J. CERF et A. GRAMAIN : Le théorème du h-cobordisme, Secrétariat mathématique de l'Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm Paris V, 1968.
- [6] A. CHENCINER : Pseudo-isotopies différentiables et pseudo-isotopies linéaires par morceaux, C. R. Acad. Sc. Paris t. 270, p. 1312-1315 (20 Mai 1970).
- [7] A. CHENCINER : Les chemins en queue d'aronde sont toujours triviaux, C. R. Acad. Sc. Paris t. 271, p. 1233-1235 (21 Décembre 1970).
- [8] A. CHENCINER : Influence de la partie non dégénérée d'un potentiel sur son groupe local d'isotropie, C. R. Acad. Sc. Paris t. 272, p. 228-230 (18 Janvier 1971).
- [9] A. CHENCINER : Classification des sphères exotiques, introduction à la chirurgie, Séminaire W. Shih, I.H.E.S. Avril 1970.
- [10] A. CHENCINER : Catastrophes de corang 2 (ombilics), Séminaire R. Thom, à paraître à l'I.H.E.S.
- [11] A. CHENCINER et F. LAUDENBACH : Singularités de codimension 1 et chemins élémentaires d'élimination, C. R. Acad. Sc. Paris t. 270, p. 1575-1578 (15 Juin 1970).

- [12] A. CHENCINER et F. LAUDENBACH : Contribution à une théorie de Smale à un paramètre dans le cas non simplement connexe, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 4ème série, t. 3, fasc. 4, 1970, p. 409-478.
- [13] J. P. DAX : Etude homotopique des espaces de plongements, Thèse Orsay 1971.
- [14] A. N. GODWIN : Three dimensional pictures of Thom's parabolic umbilic, Lanchester Polytechnic (Rugby Site), Eastlands, Rugby.
- [15] A. HAEFLIGER : Knotted $(4k-1)$ spheres in $6k$ -space, Annals of Math. vol. 75, n°3, (May 1962), p. 452-466.
- [16] M. A. KERVAIRE et J. W. MILNOR : Groups of homotopy spheres : I, Annals of Math. vol. 77, n°3, (May 1963), p. 504-537.
- [17] S. LANG : Introduction aux variétés différentiables, Dunod 1967.
- [18] F. LAUDENBACH : Disjonction de sous-variétés et application au croisement des anses, Thèse 1ère partie, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 4ème série, t. 3, fasc. 4, 1970, p. 385-408.
- [19] H. I. LEVINE : Mappings of manifolds into the plane, Amer. J. Math. 88 (1966), p. 357-365.
- [20] C. MORLET : Les méthodes de la topologie différentielle dans l'étude des variétés semi-linéaires (thèse), Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 4ème série, t. 1, 1968, p. 313-394.
- [21] C. MORLET : Plongements et automorphismes de variétés, Cours Peccot, Collège de France 1969.
- [22] I. R. PORTEOUS : The normal singularities of a submanifold, Symposium on singularities, Liverpool 1970, (preprint).
- [23] F. SERGERAERT : Deux théorèmes de stabilité, C. R. Acad. Sc. Paris t. 271 (7 Septembre 1970), p. 453-456.
- [24] L. SIEBENMANN : Torsion invariants for pseudo-isotopies on closed manifolds, Notices Amer. Math. Soc. 14 (1967), p. 942.
- [25] R. THOM : Bifurcation des gradients, Conférence à l'I.H.E.S., Décembre 1969.
- [26] R. THOM : Méthodes mathématiques de la morphogénèse, Séminaire 1970-71 I.H.E.S.
- [27] R. THOM : Topological models in biology, Topology vol. 8, p. 313-335.

- [28] R. THOM : Stabilité structurelle et morphogénèse, (à paraître).
- [29] J. B. WAGONER : Algebraic invariants for pseudo-isotopies, Symposium on singularities, Liverpool 1970, (preprint).
- [30] R. WELLS : Modifying intersections, Illinois Journal of Math., vol. 11, 1967, p. 389-403.
- [31] H. WHITNEY : On singularities of mappings of euclidean spaces. I Mappings of the plane into the plane, Annals of Math. vol. 62, n°3, (November 1955), p. 374-410.
- [32] Séminaire H. Cartan : 9ème année (1956-57), Quelques questions de topologie.
- [33] D. GROMOLL et W. MEYER : On differentiable functions with isolated critical points, Topology vol. 8 (1969), p. 361-369.



